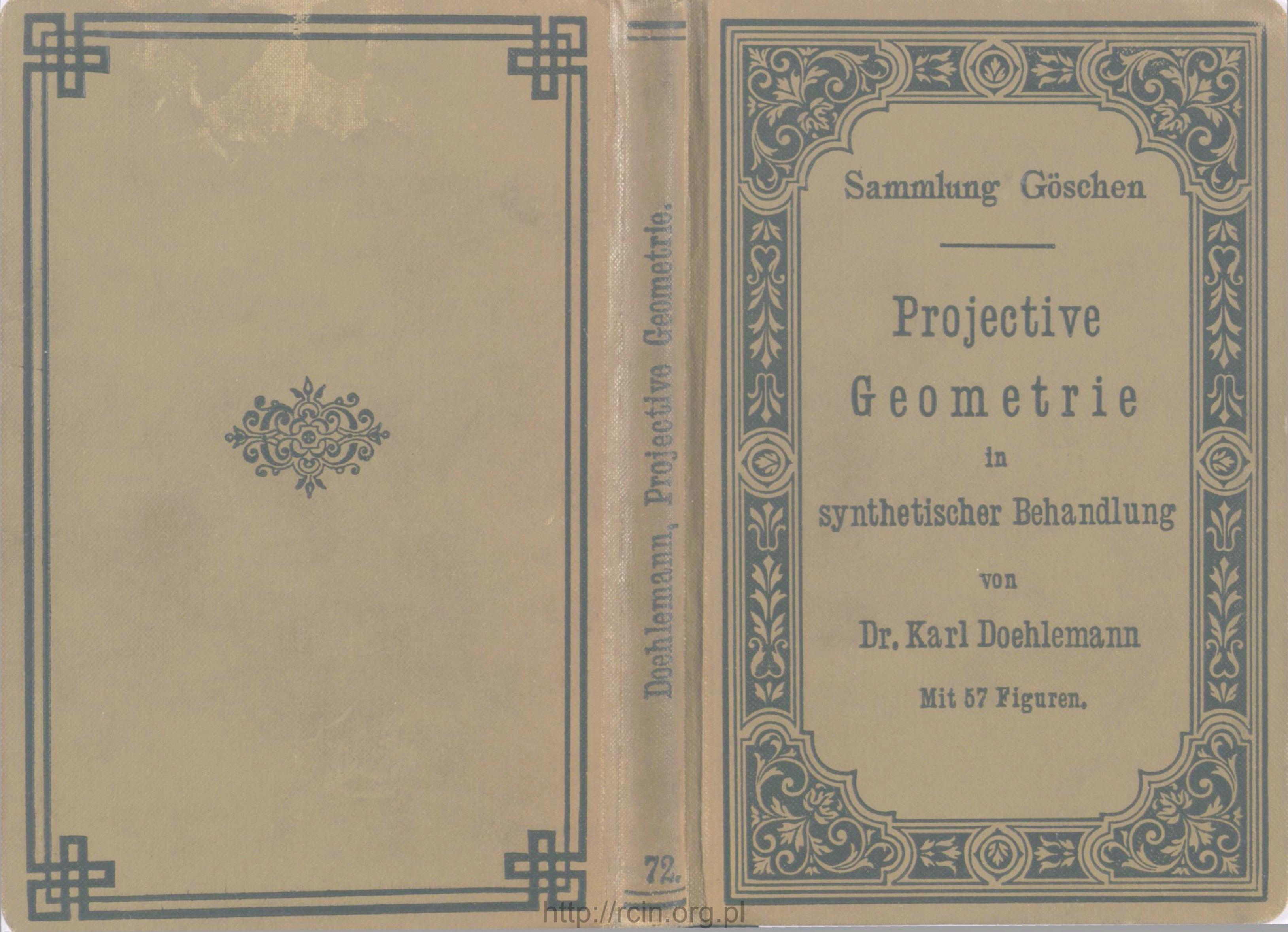

Doehlemann, Projective Geometrie.
72.
Sammlung Göschen
Projective
Geometrie
in
synthetischer Behandlung
von
Dr. Karl Doehlemann
Mit 57 Figuren.

Urteile der Presse über „Sammlung Göschen".

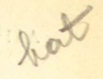
Südd. Bl. f. höh. Unterr.-Anst.: Nachdem die zwei erste[n] Auflagen von Nr. 10 der Göschenschen Sammlung (Nibelungen un[d] Kudrun in Auswahl) beifällige Aufnahme und sehr raschen Absatz gefunden haben, sind Herausgeber und Verleger übereingekommen, **diese Nummer in zwei Bändchen zu zerlegen**: a) **Der Nibelunge Nôt** ꝛc.; b) **Kudrun und Dietrichepen.** Dadurch ist es möglich geworden, den Text zu vermehren und ihn mit größeren Lettern zu drucken . . . .

Deutsche Lehrerzeitg., Berlin: In knappster, aber doch allgemein verständlicher Form bietet uns **Dr. Fraas** die **Geologie.** Besonders aber hat uns das 14. Bändchen, welches die **Psychologie und Logik** enthält, ungemein angesprochen. **Elsenhans** versteht es, für diesen Lehrgegenstand Interesse zu erregen. **Lessings Philotas,** der bekanntlich in antikem Gewand den Geist des siebenjährigen Krieges und vor allem die Denkart Friedrichs des Großen schildert, und die Poesie des siebenjährigen Krieges sind echt patriotische und herzerfreuliche Gaben. Nach den vorliegenden Bändchen stehen wir nicht an, die ganze Sammlung aufs angelegentlichste nicht allein zum Gebrauch in höheren Schulen, sondern auch zur Selbstbelehrung zu empfehlen.

Schwäbischer Merkur: Der bekannte Jenaer Pädagog **Prof. Dr. W. Rein** giebt in der „**Pädagogik** im Grundriß" eine **nicht nur lichtvolle,** sondern **geradezu fesselnde** Darstellung der praktischen und der theoretischen Pädagogik. Jedermann, der sich für Erziehungsfragen interessiert, darf man das Büchlein **warm empfehlen.** Nicht minder trefflich ist die Bearbeitung, welche der Marburger Germanist Kauffmann der **Deutschen Mythologie** gewidmet hat. Sie beruht durchaus auf den **neuesten Forschungen,** wie sich an nicht wenigen Stellen, z. B. in dem schönen Kapitel über Baldr, erkennen läßt.

Staatsanzeiger: Das 20. Bändchen, das einen **Abriß der deutschen Grammatik** und im Anhange eine **kurze Geschichte der deutschen Sprache** enthält, bietet auch eine gute Uebersicht der deutschen Sprachlehre und deutschen Sprachgeschichte. Die **klare** und **knappe** Darstellung giebt auf engem Raum einen **überraschend reichen** Stoff.

Pfälz. Kurier: Auch in der **griechischen Altertumskunde** von **Dr. R. Maisch** ist die Darstellung concis und, ohne den wissenschaftlichen Charakter zu verleugnen, **populär** im besten Sinne des Wortes.



Sammlung Göschen

Projective Geometrie

in

synthetischer Behandlung

von

Dr. Karl Doehlemann

Privatdocent an der Universität München

Mit 57 Figuren

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1898

Litteratur.

a) Grundlegende Werke.

Poncelet: Traité des propriétés projektives des figures. Paris 1822.
Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander etc. Berlin 1832.
v. Staudt: Geometrie der Lage: Nürnberg 1847.
Beiträge zur Geometrie der Lage: Nürnberg 1856, 1857, 1860.
Chasles: Traité de Géométrie supérieure: Paris 1852.
Traité des sections coniques: Paris 1865.

b) Lehrbücher.

Steiner: Vorlesungen über synthetische Geometrie:
1. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung bearb. von Geiser. Leipzig 1887.
2. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektirische Eigenschaften, bearbeitet von Schröter. Leipzig 1876.
Cremona: Elemente der projektivischen Geometrie: Deutsch von Trautvetter. Stuttgart 1882.
Hankel: Vorlesungen über die Elemente der projektivischen Geometrie. Leipzig 1875.
Bobek: Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Leipzig 1889.
Thomae: Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung. Halle a. S. 1894.

In den bisher unter b) genannten Werken finden blos „ebene" Gebilde Berücksichtigung. Auch räumliche Gebilde, Flächen u. s. w. behandelt:

Reye: Die Geometrie der Lage. 3 Abteilungen. 1. Abt. Leipzig 1886; 2. und 3. Abt. Leipzig 1892. Zur Einführung in das Studium genügt die 1. Abt.

Die darstellende Geometrie ferner benutzt vielfach die Methoden der projektiven Geometrie. Es finden sich deshalb auch in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie Darstellungen der projektiven Geometrie. Wir nennen folgende:

Schlotke: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. IV. Teil: Projektivische Geometrie. Dresden 1896.
Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Bd. Leipzig 1884. VI. Abschnitt.
Rohn und Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie 1. Bd. Leipzig 1893.

Druck und Einband von Carl Rembold & Co. in Heilbronn.

Inhalt.

Die leitenden Gesichtspunkte.

1) Eine prinzipiell strenge Darstellung hat erst für den weiter Fortgeschrittenen Wert. Dem Anfänger ist besser gedient mit einer Behandlung, welche die verschiedenen Seiten des Stoffes zur Geltung bringt. Demgemäss ist die „Projektive Geometrie“ nicht rein vom Standpunkte der Geometrie der Lage aus durchgeführt, sondern es werden auch Doppelverhältnisse benutzt. Dadurch werden zugleich viele Beweise einfacher als bei der rein konstruierenden Methode.

2) Auf anschauliche Konstruktionen, sowie konstruktive Durchführung der Figuren und Aufgaben ist jedoch ein Hauptgewicht gelegt.

3) Die Raumgeometrie ist prinzipiell von der ebenen Geometrie nicht zu trennen. Denn die neuere Geometrie soll insbesondere auch das Anschauungsvermögen ausbilden. Dies ist schon erforderlich für die Figuren der ebenen Geometrie, um die beweglichen Strahlen, Punkte u. s. f. zu verfolgen.

4) Für gewisse Begriffe und Beweise muss auf die analytische Geometrie verwiesen werden, so z. B. bei der Ordnung und Klasse einer Kurve. Ebenso erbringt erst die Rechnung die Beweise, dass die durch projektive Grundgebilde erzeugten neuen Gebilde die allgemeinen ihrer Art sind.

5) In dem zu Gebote stehenden Raum konnten nur die wichtigsten und in erster Linie die projektiven Eigenschaften zur Sprache kommen. Metrische Beziehungen bei Kegelschnitten, die Kreispunkte, Brennpunktseigenschaften u. s. f. finden ihre Behandlung ohnedies passender in der analytischen Geometrie.

I. Abschnitt.

Die perspektive Beziehung der Grundgebilde.

§ 1. Die Grundgebilde.

1. Die projektive (neuere, synthetische) Geometrie wurde nach mancherlei Ansätzen aus früherer Zeit in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts zu einem System ausgebaut und zwar in Frankreich durch Poncelet und Chasles, in Deutschland durch Möbius, Plücker und namentlich durch Steiner und v. Staudt. Von der Geometrie der Alten unterscheidet sich die neuere Geometrie vor allem dadurch, dass sie von gewissen einfachen „Grundgebilden" ausgeht und aus ihnen in einheitlicher, systematischer Weise alle übrigen geometrischen Gebilde ableitet.

Die Grundgebilde erster Stufe.

2. Die „Elemente" der Geometrie sind der Punkt, die Ebene und die Gerade. Diese letztere nennen wir Strahl, wenn sie bloss als Ganzes betrachtet wird. Aus diesen drei Elementen werden die Grundgebilde der neuern Geometrie in folgender Weise zusammengesetzt. Denken wir uns eine unbegrenzte Gerade g, so enthält dieselbe unendlich viele Punkte, die wir uns auf ihr aufgereiht denken, etwa wie Perlen auf einer gerade gespannten Schnur. Die Gerade, aufgefasst als

Inbegriff aller ihrer Punkte, bezeichnen wir als gerade Punktreihe oder kurz als Punktreihe. Weil die Punkte auf der Geraden angeordnet sind, so nennen wir die Gerade den Träger der Punktreihe. Das erzeugende Element der Punktreihe ist also der Punkt.

Durch eine Gerade können wir unendlich viele Ebenen legen, annäherungsweise wie die Blätter eines aufgeschlagenen Buches. Die Gesamtheit der Ebenen, die durch eine Gerade hindurchgehen, nennen wir einen Ebenenbüschel.

Die Gerade heisst der Träger oder die Achse des Ebenenbüschels. Als erzeugendes Element dient in diesem Falle die Ebene.

Nehmen wir endlich eine Ebene ε und in ihr einen Punkt S, so können wir in dieser Ebene unendlich viele Gerade oder Strahlen ziehen, die überdies durch S gehen, ähnlich wie die Speichen eines Rades. Den Inbegriff aller dieser Strahlen nennt man einen Strahlenbüschel. Der Punkt S heisst der Mittelpunkt des Büschels. Als erzeugendes Element ist hier die Gerade d. h. der Strahl verwendet.

Die Punktreihe, der Ebenenbüschel und der Strahlenbüschel heissen die Grundgebilde erster Stufe oder die einförmigen Grundgebilde.

Die Grundgebilde zweiter Stufe.

3. Gehen wir aus von einem Punkte S im Raume, so gibt es durch ihn unendlich viele Strahlen und Ebenen. Den Inbegriff aller dieser Elemente bezeichnen wir als Bündel und zwar als Strahlenbündel oder Ebenenbündel, je nachdem wir Strahlen oder Ebenen als Elemente wählen. Der Punkt S heisst der Mittel-

punkt des Bündels. Eine Ebene des Strahlenbündels S wird erzeugt durch die Strahlen des Strahlenbüschels, der in dieser Ebene liegt und S zum Mittelpunkt hat. Im Ebenenbündel dagegen ist jeder Strahl aufzufassen als Achse eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen also sämtlich dem Bündel angehören. Es enthält demnach der Bündel unendlich viele Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

Betrachten wir ferner eine unendlich ausgedehnte Ebene ε mit allen in ihr gelegenen Punkten und Geraden, so nennen wir den Inbegriff aller dieser Elemente ein ebenes System, oder ein Feld. Wir sprechen von einem Punktfeld oder einem Strahlenfeld, je nachdem wir die Punkte oder die Strahlen im Auge haben. Im Punktfeld sind die einzelnen Geraden aufzufassen als Punktreihen, im Strahlenfeld die einzelnen Punkte als Strahlenbüschel. Das ebene System enthält unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel.

Der Bündel und das ebene System bilden zusammen die beiden Grundgebilde zweiter Stufe. Sie enthalten unendlich viele Grundgebilde erster Stufe.

Das Grundgebilde dritter Stufe.

4. Als Grundgebilde dritter Stufe können wir den ganzen, unendlichen Raum mit allen in ihm enthaltenen Punkten, Ebenen und Strahlen bezeichnen. Jeder seiner Punkte kann als Mittelpunkt eines Bündels, jede seiner Ebenen als Träger eines ebenen Systems, jeder seiner Strahlen als Achse eines Ebenenbüschels oder als Träger einer Punktreihe genommen werden.

Die Gesamtheit von unendlich vielen, durch irgend ein geometrisches oder analytisches Gesetz defi-

nierten Elementen irgend welcher Art, heisst eine Mannigfaltigkeit. Demnach sind die Grundgebilde Mannigfaltigkeiten von Punkten, Ebenen und Strahlen.

Um übrigens schon durch die äussere Form der Darstellung den Ueberblick über die zu betrachtenden Gebilde zu erleichtern, wollen wir für die geometrischen Elemente eine bestimmte Art der Bezeichnung festhalten. Wir bezeichnen: Punkte durchweg mit grossen lateinischen Buchstaben: z. B. A, B, P, S; Gerade oder Strahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben wie a, b, g; Ebenen endlich stets mit kleinen griechischen Buchstaben: z. B. α, β, ε.

§ 2. Schneiden und Projizieren. Das Gesetz der Dualität.

Die Operation des Schneidens.

5. Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen oder eine Gerade und eine nicht durch sie hindurchgehende Ebene liefern einen Schnittpunkt; zwei Ebenen bestimmen eine Schnittgerade. Das neue Schnittelement ist nur dann nicht vorhanden, wenn die gegebenen Elemente parallel sind. Diese spezielle Lage wollen wir zunächst von der Betrachtung ausschliessen. In jedem der drei oben genannten Fälle suchen wir ein Element, das den beiden gegebenen Elementen gemeinsam ist. Wir bezeichnen diese Operation als die des Schneidens und müssen sie jetzt auch auf die Grundgebilde ausdehnen.

Betrachten wir einen Strahlenbüschel S (Fig. 1) und eine Gerade g, die in der Ebene des Büschels

liegen, aber nicht durch den Mittelpunkt S des Büschels hindurchgehen möge, so können wir die Strahlen des Büschels zum Schnitt mit g bringen. Wir erhalten also auf g eine Punktreihe, insofern jeder Punkt dieser Geraden als Schnittpunkt von g mit einem Strahl des Büschels aufgefasst werden kann. Dies drücken wir dadurch aus, dass wir sagen: Die Gerade g schneidet den Büschel S in einer Punktreihe.

Im gleichen Sinne sind folgende Sätze zu verstehen: Eine Gerade schneidet einen Ebenenbüschel, dessen Achse sie nicht trifft, in einer Punktreihe. — Eine Ebene schneidet einen Ebenenbüschel, dessen Achse sie nicht enthält, in einem Strahlenbüschel. — Eine Ebene schneidet einen Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt sie nicht enthält, in einem Punktfeld. — Es entstehen demnach aus den Grundgebilden durch die Operation des Schneidens auch nur wieder Grundgebilde.

Die Operation des Projizierens.

6. Zwei Punkte können wir durch eine Gerade verbinden, zwei sich schneidende Gerade durch eine Ebene einen Punkt und eine, nicht durch ihn hindurchgehende, Gerade ebenfalls durch eine Ebene. Wir bezeichnen diese Operation als die des Projizierens. Sie unterscheidet sich übrigens von der des Schneidens nur durch die Art der gegebenen Elemente. Bei beiden Operationen aber handelt es sich darum, dass man die gegebenen Elemente als Träger von Grundgebilden betrachtet und ein diesen Grundgebilden gemeinsames Element bestimmt.

Wenden wir nun auch die Operation des Projizierens auf die Grundgebilde an. Es sei z. B. eine Punktreihe g gegeben und ein Punkt S, ausserhalb derselben (Fig. 1). Dann können wir jeden Punkt von g mit S verbinden und erhalten durch diese Verbindungsstrahlen den Strahlenbüschel S. Von ihm sagen wir: er projiziert aus S die Punktreihe.

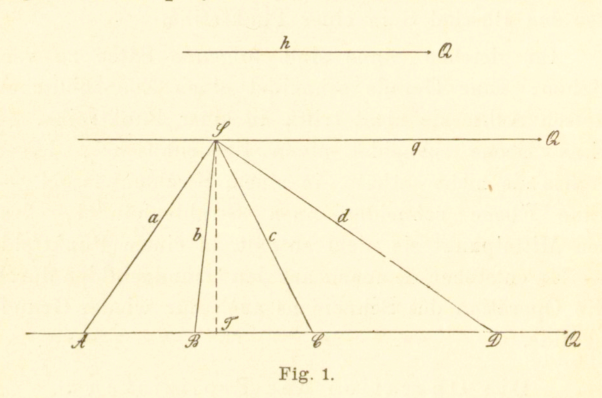


Fig. 1.

Ebenso wird ein Punktfeld aus irgend einem, ihm nicht angehörenden, Punkte durch einen Strahlenbündel projiziert.

Die Operation des Projizierens kann auch von einer Geraden aus erfolgen. Ist s irgend eine Gerade und g eine Punktreihe, wobei g und s sich nicht schneiden, so kann man durch die Punkte von g und durch s Ebenen legen. Es wird also die Punktreihe g aus s durch einen Ebenenbüschel projiziert.

Auch durch die Operation des Projizierens entstehen somit aus den Grundgebilden wieder nur Grund-

gebilde. Durch Projizieren und Schneiden gehen also die Grundgebilde ineinander über.

Man kann nun eine Darstellung der Geometrie durchführen, bei der man bloss die Operationen des Projizierens und Schneidens benutzt, jede Abmessung aber, sei es von Strecken, sei es von Winkeln, also auch jede Rechnung mit solchen Grössen durchaus vermeidet. Die darauf gegründete Untersuchungsmethode heisst die Geometrie der Lage. Diese „konstruierende" Geometrie liefert die rein geometrischen Eigenschaften der Gebilde. Im Gegensatz zu ihr nennt man die messende, analytische Geometrie wohl auch Geometrie des Masses oder metrische Geometrie. Die Eigenschaften der geometrischen Gebilde, mit denen sich die Geometrie der Lage beschäftigt, heissen auch projektive Eigenschaften und die Art der Darstellung, welche auf dem Wege der Rechnung diese Eigenschaften ergründet, mag als „projektive Geometrie" bezeichnet werden.

Wir werden im Folgenden nicht streng eine Methode zur Durchführung bringen, sondern, wie es für den Anfänger vorteilhafter erscheint, eine gemischte Methode anwenden.

Das Gesetz der Dualität.

7. Wenn in der Geometrie der Lage ausschliesslich die Operationen des Projizierens und Schneidens Verwendung finden, so muss es möglich sein, der Ableitung irgend eines Satzes durch Aenderung der ursprünglich gegebenen Elemente eine zweite Ableitung gegenüberzustellen, in der durchweg an Stelle der einen Operation die andere getreten ist. Man erhält

dann einen zweiten Satz, das Gegenbild des ersten Satzes, den man auch direkt aus dem ersten folgern kann, vermöge des Gesetzes der Dualität oder der Reciprocität, durch das die ganze Geometrie der Lage in zwei Hälften geteilt wird. Wir erhalten für dies Gesetz verschiedene Fassungen, je nachdem wir uns auf die Geometrie in der Ebene oder im Bündel beschränken oder den Raum ohne jede Beschränkung heranziehen. Wir wollen diese Beziehungen in einer Tabelle zur Darstellung bringen, indem wir immer zwei sich „dual" entsprechende Begriffe oder Sätze links und rechts auf die gleiche Zeile setzen;

a) Dualität in der Ebene:

Punkt.	Gerade.
Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungslinie.	Zwei Gerade bestimmen einen Schnittpunkt.
Drei Punkte liegen auf einer Geraden.	Drei Gerade gehen durch einen Punkt.
Punktreihe.	Strahlenbüschel.

u. s. f.

b) Dualität im Bündel:

Strahl.	Ebene.
Zwei Strahlen bestimmen eine Ebene.	Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade.
Drei Ebenen gehen durch eine Gerade.	Drei Gerade liegen in einer Ebene.
Ebenenbüschel.	Strahlenbüschel.

u. s. f.

c) Dualität im Raume:

Punkt.	Ebene.
Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade.	Zwei Ebenen bestimmen eine Schnittgerade.
Gerade.	Gerade.
Ebene.	Punkt.
Drei Punkte bestimmen eine Ebene.	Drei Ebenen bestimmen einen Schnittpunkt.
Punktreihe.	Ebenenbüschel.
Strahlenbüschel.	Strahlenbüschel.
Ebenenbündel.	Punktfeld.

u. s. f.

Wir werden im Folgenden vielfach Gelegenheit haben, namentlich das Dualitätsgesetz der Ebene anzuwenden. Eine Betrachtung, die z. B. für zwei Punktreihen durchgeführt ist, können wir ohne weiteres auf zwei Strahlenbüschel übertragen.

In der Geometrie des Masses gilt das Dualitätsgesetz nicht mehr in aller Strenge; wohl aber können wir Analogien auffinden.

§ 3. **Die uneigentlichen Elemente.**

Der unendlich ferne Punkt einer Geraden.

8. Den in (5) besprochenen Prozess des Schneidens konnten wir nicht mehr zur Durchführung bringen, wenn die in Betracht zu ziehenden Elemente parallel waren, z. B. bei zwei parallelen Geraden. Wir wollen nun sehen, wie wir, wenigstens formal, den genannten Prozess auch auf diesen Fall ausdehnen können.

Schneiden wir (Fig. 1) einen Strahlenbüschel S mit einer Geraden g, die in der Ebene des Büschels liegt, ohne ihm anzugehören. Die einzelnen Strahlen a, b, c, d .... des Büschels mögen von g in A, B, C, D .... getroffen werden. Dann gibt es nach den Voraussetzungen der Euclidischen Geometrie durch S eine und nur eine Parallele q zur Geraden g. Indem wir diese Annahme machen, wollen wir ausdrücklich bemerken, dass wir nicht imstande sind, dieselbe durch mathematische Schlüsse zu beweisen, dass wir sie vielmehr als eines der grundlegenden Axiome vorausschicken müssen. Würde man statt desselben ein anders lautendes Axiom an die Spitze stellen, so erhielte man ein anderes, in sich aber ebenso logisch geschlossenes System einer Geometrie.

Demnach schneiden alle die unendlich vielen Strahlen des Büschels S die Gerade g je in einem Punkte, nur der Parallelstrahl q liefert keinen Schnittpunkt mit g. Es ist nun namentlich für die einfachere Formulierung allgemeiner Sätze ein Vorteil, diese Ausnahmestellung des Parallelstrahles wenigstens in dem Ausdruck zu beseitigen. Wir erreichen dies, indem wir uns so ausdrücken: „Der Parallelstrahl q schneidet die Gerade g in einem unendlich fernen Punkt Q". Zu den im Endlichen gelegenen, eigentlichen Punkten der Geraden g nehmen wir also noch einen „uneigentlichen", fingierten, hinzu, dem wir uns in der Vorstellung nähern, wenn wir die Gerade nach der einen oder andern Seite über alle Grenzen hinaus verlängern. Man kann sich auch einen Strahl denken, der sich

um S dreht und diesen kurz vor und nach der Lage betrachten, in der er zu g parallel ist.

Wir wollen diesen uneigentlichen (adjungierten), unendlich fernen Punkt der Geraden mit Q bezeichnen und durch Hinzufügung eines Pfeiles andeuten, dass er auf der Geraden g im Unendlichen liegt.

Ziehen wir in der Ebene des Strahlenbüschels S irgend eine weitere Gerade h parallel zu g, so werden wir auch von dieser Parallelen h sagen, dass sie durch den nämlichen, unendlich fernen Punkt Q geht. Ein unendlich ferner Punkt ist folglich gleich bedeutend mit einer „bestimmten Richtung". Die Gesamtheit von unendlich vielen, zu einander parallelen Geraden, die alle in einer Ebene liegen, wird nach dieser Anschauung aufzufassen sein als ein Strahlenbüschel dessen Mittelpunkt der den sämtlichen Parallelen gemeinsame unendlich ferne Punkt ist. Ein solcher Strahlenbüschel heisst wohl auch ein „Parallelstrahlenbüschel.

In entsprechender Weise bilden alle Geraden im Raume, die zu irgend einer Geraden g parallel laufen, also alle die gleiche Richtung haben, einen „Parallelstrahlenbündel".

Die unendlich ferne Gerade einer Ebene.

9. Nehmen wir jetzt eine Ebene als gegeben an, so liegen in ihr in jeder Richtung Punkte im Unendlichen. Alle diese uneigentlichen Punkte werden eine gewisse Mannigfaltigkeit bilden, und jede Gerade g der Ebene hat mit derselben einen Punkt gemein, nämlich den unendlich fernen Punkt dieser Geraden g.

Wenn wir also sagen: die unendlich fernen Punkte der gegebenen Ebene liegen auf einer „unendlich fernen" Geraden, so ergibt sich der unendlich ferne Punkt einer Geraden g dieser Ebene als Schnittpunkt derselben mit dieser „unendlich fernen" Geraden. Natürlich entzieht sich das Unendliche jeder Vorstellung. Wenn wir aber diese uneigentliche Gerade einer Ebene hinzunehmen, so können wir unter dieser Annahme, vorausgesetzt, dass sich im weiteren Verlauf keine Widersprüche ergeben, das Unendliche formal wie das Endliche behandeln.

Eine Ebene enthält also eine unendlich ferne Gerade. Sie ist gegeben, sobald die Ebene gegeben ist. Alle Punkte dieser unendlich fernen Geraden liegen im Unendlichen, sind also uneigentliche. Diese unendlich ferne Gerade hat auch keine bestimmte Richtung. Irgend zwei parallele Gerade dieser Ebene schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene. Wir können jetzt z. B. allgemein sagen: zwei Gerade in einer Ebene bestimmen einen Schnittpunkt.

Die unendlich ferne Ebene des Raumes.

10. Um diese Anschauung nun weiter für den Raum auszubilden, sei S der Mittelpunkt eines Ebenenbündels, ε eine ihm nicht angehörende Ebene. Jede Ebene des Bündels liefert mit ε eine Schnittgerade. Ferner giebt es nach den Sätzen der Elementargeometrie durch S eine und zwar nur eine Parallelebene ξ zu ε. Diese Ebene ξ allein liefert mit ε keine Schnittgerade. Um nun nicht alle Sätze, die sich auf die Schnittlinie zweier Ebenen beziehen, für parallele Ebenen beson-

ders formulieren zu müssen, drücken wir uns so aus: Die Parallelebene ξ hat mit ε eine uneigentliche, unendlich ferne Gerade gemein. Dies stimmt dann auch zusammen mit den Anschauungen von 9). Weiter gehen alle zu ε parallelen Ebenen durch die gleiche unendlich ferne Gerade. Sagen wir von parallelen Ebenen, sie haben die gleiche „Stellung", so ist also eine unendlich ferne Gerade im Raum durch die Stellung einer Ebene bestimmt.

Alle zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebenen bilden einen Ebenenbüschel, dessen Achse die durch die Stellung der Parallelebenen gegebene unendlich ferne Gerade ist.

„Eine Ebene ist parallel einer Geraden" heisst: die Ebene geht durch den unendlich fernen Punkt der Geraden.

Im Raume können wir unendlich viele, unendlich ferne Punkte und Geraden aufsuchen. Jede Gerade enthält einen unendlich fernen Punkt, jede Ebene eine unendlich ferne Gerade. Wir bleiben also in Uebereinstimmung mit den bisherigen Formulierungen, wenn wir uns so ausdrücken: Alle unendlich fernen Punkte und unendlich fernen Geraden des Raumes erfüllen eine Ebene, die „unendlich ferne" Ebene des Raumes.

Sie enthält lauter uneigentliche Elemente und hat keine bestimmte Stellung.

So z. B. können wir den Satz: „Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade" jetzt ganz allgemein aussprechen. Liegen beide Punkte im Endlichen, so ist die durch sie bestimmte Gerade die Verbindungslinie; ist einer der beiden gegebenen Punkte ein

unendlich ferner, so ist die Verbindungsgerade die Parallele, welche durch den einen Punkt parallel zu der Richtung geht, in welcher der andere gegebene unendlich ferne Punkt liegt; sind die beiden gegebenen Punkte unendlich fern, d. h. hat man zwei Gerade, auf denen im Unendlichen die beiden gegebenen Punkte liegen sollen, so ist die Verbindungsgerade eine bestimmte unendlich ferne Gerade. Eine Ebene, welche zu den beiden gegebenen Geraden parallel ist, giebt die Stellung aller Ebenen, die durch diese unendlich ferne Gerade hindurchgehen.

§ 4. Die perspektive Beziehung der Grundgebilde.

Punktreihe und Strahlenbüschel in perspektiver Lage.

11. Wenn wir wie in 8) Fig. 1 einen Strahlenbüschel S mit einer Geraden g zum Schnitt bringen, so entspricht jedem Punkte von g ein Strahl des Büschels, nämlich der durch ihn hindurchgehende. Nehmen wir auch den unendlich fernen Punkt Q von g hinzu und behandeln ihn im Ausdruck wie einen eigentlichen Punkt, so entspricht ihm der Strahl q des Büschels. Damit ist also auch die Zuordnung zwischen den Punkten der Punktreihe und den Strahlen des Büschels eine ausnahmslose geworden. Weil jedem Element des einen Gebildes ein und nur ein Element des andern Gebildes entspricht, so sagen wir, die beiden Gebilde, Punktreihe und Strahlenbüschel, seien „eindeutig" aufeinander bezogen. Ferner liegen je zwei entsprechende Elemente in einander.

Wir nennen diese Beziehung zwischen der Punkt-

reihe und dem Strahlenbüschel eine „perspektive“. Dies ist zunächst nur ein anderer Ausdruck dafür, dass die Punktreihe ein Schnitt des Strahlenbüschels ist. Ebenso nennen wir die Punktreihe, wonach eine Gerade einen Ebenenbüschel schneidet, oder den Strahlenbüschel, in welchem eine Ebene einen Ebenenbüschel trifft, perspektiv zu dem Ebenenbüschel. Das Zeichen für perspektiv ist $\overline{\wedge}$.

Auch das Punktfeld, welches irgend eine Ebene aus einem Strahlenbündel ausschneidet, wird perspektiv zu dem Strahlenbündel sein.

Perspektive Punktreihen.

12. Um jetzt auch gleichartige Grundgebilde eindeutig aufeinander zu beziehen, bringen wir einen Strahlenbüschel S zum Schnitt mit zwei Geraden g und g_1 seiner Ebene, von denen keine dem Büschel angehört (Fig. 2).

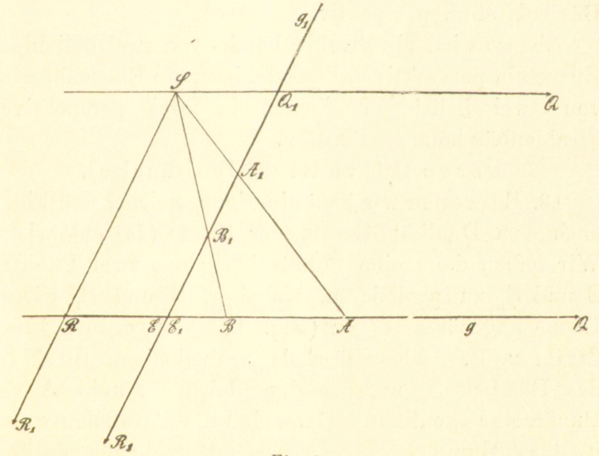


Fig. 2.

Irgend ein Strahl a trifft g in A, g_1 in A_1, ein Strahl b liefert die Schnittpunkte B und B_1 u. s. f. Jedem Punkte der einen Punktreihe z. B. A entspricht, dann ein und nur ein Punkt A_1 der andern Punktreihe und dies bleibt auch richtig für die unendlich fernen Punkte Q und R_1 von g und g_1. Denn diesen entsprechen die Punkte Q_1 und R, in denen die durch S zu g und g_1 gezogenen Parallelstrahlen q und r die Träger g und g_1 bezüglich schneiden.

Dadurch sind die Punktreihen g und g_1 eindeutig aufeinander bezogen. Je zwei entsprechende Punkte liegen auf dem nämlichen Strahl des Büschels S. Es mag noch bemerkt werden, dass im Schnittpunkte von g und g_1 entsprechende Punkte E und E_1 der beiden Punktreihen vereinigt sind. Wir nennen die beiden Punktreihen g und g_1, die also Schnitte eines Büschels sind, perspektiv.

Ebenso wird ein Strahlenbündel von zwei beliebigen Ebenen in perspektiven Punktfeldern, ein Ebenenbüschel von zwei beliebigen Ebenen in zwei perspektiven Strahlenbüscheln geschnitten.

Perspektive Strahlenbüschel.

13. Entwerfen wir jetzt die Figur, welcher der Fig. 2 nach dem Dualitäts-Gesetz der Ebene (7a) entspricht. Wir haben dann eine Punktreihe g aus zwei Punkten S und S_1 zu projizieren, wobei g, S und S_1 einer Ebene angehören mögen (Fig. 3). Wir ordnen jedem Strahl z. B. a des Büschels S denjenigen Strahl a_1 des Büschels S_1 zu, der den gleichen Punkt A der Punktreihe g enthält. Dann sind die Parallelen q und q_1 durch S und S_1 zu g auch als entsprechende Strahlen

aufzufassen, da beide den unendlich fernen Punkt Q von g projizieren. Die eindeutige Beziehung der beiden Büschel S und S_1 ist demzufolge wieder eine lückenlose. Im Verbindungsstrahl SS_1, der beiden

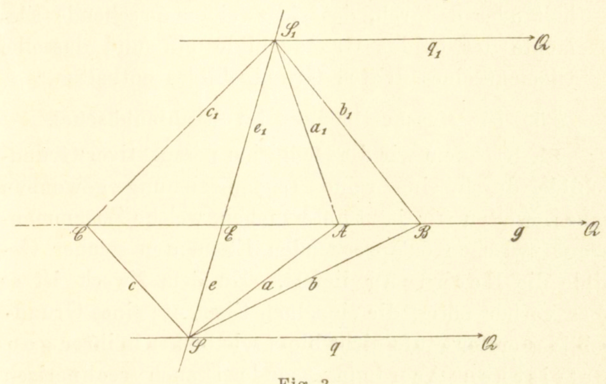


Fig. 3.

Büscheln angehört, sind e n t s p r e c h e n d e Strahlen e und e_1 der Strahlenbüschel vereinigt. Wir nennen zwei solche Büschel, welche die gleiche Punktreihe projizieren, wiederum „perspektiv".

Projicieren wir ein ebenes System aus zwei Punkten, so sind die entstehenden Bündel ebenfalls perspektiv. Je zwei entsprechende Strahlen der Bündel enthalten d e n s e l b e n Punkt, je zwei entsprechende Ebenen d i e s e l b e Gerade dieses ebenen Systems.

Allgemein können wir jetzt die Definition für p e r s p e k t i v e Grundgebilde erster und zweiter Stufe, sowohl gleichartige als ungleichartige, in folgender Weise aussprechen.

Definition: „Zwei Grundgebilde erster oder zweiter Stufe

heissen perspektiv, wenn eine eindeutige Beziehung ihrer Elemente hergestellt ist entweder dadurch, dass jedes Element des einen Grundgebildes das entsprechende Element des andern Grundgebildes enthält oder dadurch, dass je zwei entsprechende Elemente der beiden Grundgebilde ein und dasselbe Element eines dritten Grundgebildes enthalten."

§ 5. Die Massbestimmung im Strahlenbüschel.

14. Nachdem wir die Definition perspektiver Grundgebilde durch eine reine Lagenbeziehung gewonnen haben, wollen wir jetzt untersuchen, welche Zusammenhänge zwischen entsprechenden Elementen solcher Gebilde die Rechnung liefert. Zu dem Zweck ist es aber vorher nötig, die einzelnen Elemente eines Grundgebildes erster Stufe nicht bloss wie bisher in ihrer geometrischen Anordnung, sondern auch rechnerisch also durch Zahlenwerte, festzulegen.

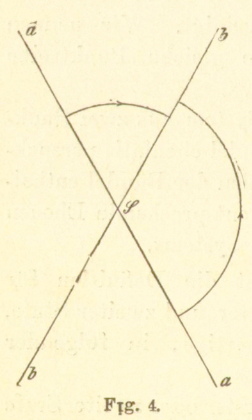


Fig. 4.

Beginnen wir mit dem Strahlenbüschel, weil dieser kein uneigentliches Element enthält und daher die zu betrachtenden Verhältnisse unverschleiert zur Erscheinung kommen.

Winkel zweier Strahlen. Trennungsstrahl.

15. Sind a und b zwei Strahlen eines Büschels (Fig 4), so wollen wir unter ab den Winkel verstehen, den der Strahl a mit dem Strahl b bildet und die Reihen

folge der Buchstaben soll den Sinn der Drehung angeben, in welchem der Winkel durchlaufen wird, also von a nach b hin. Dann ist dieser Ausdruck ab doppeldeutig; denn es kann darunter jeder der in der Figur bezeichneten Winkel verstanden werden.

Hat man ferner drei Strahlen a, b, c, so können wir mittels derselben eine Drehungsrichtung bestimmen, indem wir unter dem „Sinn a b c" diejenige Drehung verstehen, welche a direkt nach b überführt, ohne dass der Strahl c dabei überschritten wird (Fig. 5).

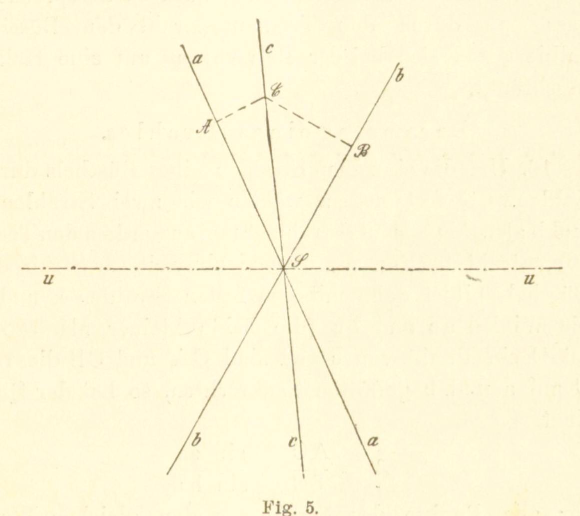


Fig. 5.

Um nun im Büschel die Winkel eindeutig zu erhalten, wählen wir einen festen Strahl u und verstehen unter ab den im Sinne abu genommenen Winkel. Dieser ist dann eindeutig (Fig. 5). Der Hilfsstrahl

u möge der „Trennungsstrahl“ heissen. Dann zerstören sich die Drehungen ab und ba und es ist

$$ab + ba = o \text{ oder } ab = - ba$$

Ist c irgend ein weiterer Strahl, so gilt, ganz unabhängig von der Lage der Strahlen, die Beziehung

$$ab + bc = ac \text{ oder}$$
$$ab + bc + ca = o$$

und allgemein für die Strahlen a, b, c, ... m, n

$$ab + bc + \ldots + mn + na = o$$

Man kann diese Festsetzung auch so aussprechen, dass man durch den Trennungsstrahl den Büschel halbiert und sich bei der Betrachtung auf eine Hälfte beschränkt.

Parameter eines Strahles.

16. Um die einzelnen Strahlen eines Büschels durch Zahlenwerte festzulegen, wählen wir zwei Strahlen a und b als „Fundamentalstrahlen“ und ausserdem den Trennungsstrahl u. (Fig. 5.) Irgend ein weiterer Strahl des Büschels bildet dann mit den festen Strahlen a und b die Winkel ac und bc (die beide kleiner als 180°). Ist C ein Punkt von c und sind CA und CB die von C auf a und b gefällten Senkrechten, so hat der Quotient

$$\lambda = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin ac}{\sin bc}$$

für alle Punkte des Strahles c den gleichen Wert. Wir geben diesem, aus lauter positiven Zahlen gebildeten Bruche das Vorzeichen +, wenn die Drehungen ac und bc gleichen Sinn haben, dagegen das Vorzeichen —, wenn diese Drehungen entgegengesetzt gerichtet sind.

Dann entspricht jedem Strahl des Büschels ein solcher Wert λ. Den Fundamentalstrahlen a und b entsprechen die Werte $\lambda = 0$ bezw. $\lambda = \infty$; für die Halbierungslinien der Winkel, welche die Fundamentalstrahlen bilden, ergeben sich die Werte $\lambda = +1$ und $\lambda = -1$. Durch die Werte o und ∞ hindurch geht λ von positiven zu negativen Werten über.

Umgekehrt kann man zu einem, auch dem Vorzeichen nach gegebenen Werte $\lambda = \lambda_0$ nur einen und immer einen zugehörigen Strahl bestimmen. Denn angenommen, es sei p dieser Strahl, so muss sein:

$$\frac{\sin ap}{\sin bp} = \lambda_0$$

Führt man bp = ba + ap ein, so liefert eine leichte Rechnung:

$$\operatorname{tg} ap = \frac{\lambda_0 \,.\, \sin ba}{1 - \lambda_0 \cos ba}$$

Damit ist der Winkel ap bestimmt; auf welcher Seite von a der Strahl p aber liegen muss, ergibt sich aus dem Vorzeichen von λ_0, unter Berücksichtigung der angeführten Verteilung der Zahlenwerte von λ in dem Büschel.

Aufg. 1. Man finde durch Zeichnung und Rechnung die Strahlen, welche den Werten $+\frac{2}{3}$ und $-\frac{2}{3}$ von λ entsprechen.

§ 6. Die Massbestimmung in der Punktreihe.

Strecke zwischen zwei Punkten.

17. Die Mannigfaltigkeit der Punkte einer Punktreihe g wird erst durch die Annahme des unendlich fernen Punktes U derselben zu einer zusammenhängenden, in

dem dann die Gerade gewissermassen durch das Unendliche hindurch sich schliesst. Irgend zwei Punkte A und B der Geraden bestimmen dann auch zunächst zwei Strecken, von denen die eine, der Weg von A nach B, endlich ist, während die andere, der Weg von A durch das Unendliche nach B, unendlich ist.

Drei Punkte A, B, C bestimmen wieder einen „Sinn ABC“, nämlich die Bewegungs-Richtung, bei der wir von A direkt nach B gelangen, ohne C zu passieren.

Da unendlich grosse Strecken nicht zu verwenden sind, so werden wir unter AB die endliche der beiden oben erwähnten Strecken verstehen. Dies stimmt aber damit überein, dass wir den unendlich fernen Punkt U als „Trennungs-Punkt“ einführen, ganz wie in 15) beim Büschel den Trennungsstrahl. Unter AB ist die im „Sinne ABU“ genommene Strecke zu verstehen.

Dann ist offenbar

$$AB + BA = 0 \text{ oder } AB = -BA$$

nd für drei Punkte gilt, wie immer sie auch liegen, die Relation

$$AB + BC = AC \text{ oder}$$
$$AB + BC + CA = 0$$

und allgemein für die Punkte A, B, C .... M, N

$$AB + BC + \ldots + MN + NA = 0$$

Parameter eines Punktes.

18. Um nun die einzelnen Punkte der Punktreihe durch Zahlenwerte festzulegen, gehen wir von zwei festen Punkten A und B aus, den „Fundamentalpunkten“.

Irgend ein Punkt C der Punktreihe bestimmt dann den Streckenquotient

$$\lambda = \frac{AC}{BC}$$

Diesem Quotienten, dessen Zähler und Nenner die Masszahlen der Strecken AC und BC enthält, geben wir das Vorzeichen $+$, wenn AC und BC in gleicher Richtung laufen, C also nicht auf der Strecke AB gelegen ist, dagegen das Vorzeichen —, wenn AC und BC nach entgegengesetzten Richtungen sich erstrecken, also C auf der Strecke AB liegt. Dann bestimmt jeder Punkt der Geraden einen solchen Parameterwert λ. Dem Werte $\lambda = 0$ entspricht der Punkt A, dem Werte $\lambda = \infty$ der Punkt B; $\lambda = 1$ liefert den unendlich fernen Punkt, woraus andererseits analytisch dessen Berechtigung folgt.

Umgekehrt gibt es stets nur einen Punkt derart, dass für ihn dieser Quotient einen auch dem Vorzeichen nach gegebenen Wert $\lambda = \lambda_0$ hat. Denn ist P der gesuchte Punkt, so muss sein

$$\frac{AP}{BP} = \lambda_0$$

oder, wenn $BP = BA + AP$ gesetzt wird

$$AP = \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \cdot BA.$$

Wählen wir, was das einfachste ist, eine bestimmte Richtung auf der Geraden, etwa die von A nach B, als die positive, so sind alle im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Strecken negativ zu rechnen. Es ergibt sich dann aus der letzten Gleichung die Strecke AP samt ihrer Richtung.

Aufg. 2. Man zeichne und berechne die Punkte, welche den Werten $-1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ des Parameters λ entsprechen.

Für das dritte Grundgebilde erster Stufe, den Ebenenbüschel, brauchen wir keine eigene Betrachtung durchzuführen: wir schneiden ihn mit einer Ebene, etwa senkrecht zur Achse, in einem Strahlenbüschel und erhalten die Ebenen des Büschels dann durch die Parameterwerte, welche die Strahlen dieses Strahlenbüschels liefern.

§ 7. Das Doppelverhältnis.

Doppelverhältnis von vier Punkten.

19. Sind in einer Punktreihe g ausser den zwei Fundamentalpunkten A und B zwei weitere Punkte C und D gegeben und bestimmen wir für diese nach der in 18) gegebenen Festsetzung die Streckenverhältnisse $\frac{AC}{BC}$ und $\frac{AD}{BD}$, so können wir aus diesen beiden das neue Verhältnis bilden:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

Dieser Ausdruck wird sich als charakteristisch für die Lage der vier Punkte A, B, C, D erweisen. Wir nennen ihn, seiner Bildung gemäss, das „Doppelverhältnis" der vier Punkte und bezeichnen ihn durch (ABCD). Wir haben also folgende

Definition: Unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden verstehen wir den Ausdruck

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

wobei jedes der einzelnen Verhältnisse mit dem ihm nach 18) zukommenden Vorzeichen zu versehen ist.

Die vier Punkte erscheinen dabei in zwei Gruppen geteilt, welche zunächst nicht gleichartig behandelt sind. Denn A und B dienten als Fundamentalpunkte und C und D wurden auf diese bezogen. Es ist aber sofort zu beweisen, dass diese beiden Punktpaare in dem Ausdruck des Doppelverhältnisses ganz die gleiche Rolle spielen. Denn es ist ja

$$(CDAB) = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = (ABCD).$$

Man darf also die beiden Punktpaare miteinander vertauschen.

Getrennte Punktpaare.

20. Für die gegenseitige Lagenbeziehung zweier Punktgruppen A, B und C, D sind nun folgende zwei Fälle als wesentlich zu unterscheiden:

a) Die beiden Punktpaare A, B und C, D liegen so, dass man beim Uebergang von A nach B auf dem einen oder andern Wege einen der Punkte C oder D passieren muss (Fig. 6[a]). Von den Punkten C und D

A C B D

Fig. 6a.

C A B D

Fig. 6b.

muss dann einer auf der Strecke AB, der andere ausserhalb dieser Strecke gelegen sein. Wir sagen in diesem Falle: die beiden Punktpaare „trennen sich" gegenseitig. Von den beiden Teilverhältnissen in dem

Ausdruck des Doppelverhältnisses (ABCD) muss demnach das eine positiv, das andere negativ sein, das ganze Doppelverhältnis hat demzufolge einen negativen Wert.

b) Kann man auf einem der beiden Wege von A nach B gelangen, ohne C oder D zu überschreiten, so trennen sich die beiden Punktpaare nicht (Fig. 6^b). Es liegen dann C und D beide auf der Strecke AB oder beide ausserhalb derselben; die Teilverhältnisse in dem Ausdruck (ABCD) haben beide negative oder beide positive Vorzeichen, das Doppelverhältnis selbst nimmt jedenfalls einen positiven Wert an.

Diese Eigenschaften sind auch umkehrbar. Wir können also sagen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Punktpaare A, B und C, D sich trennen, ist die, dass das Doppelverhältnis (ABCD) einen negativen Wert hat.

Doppelverhältnis von vier Strahlen.

21. Ganz analoge Betrachtungen gelten für den Strahlenbüschel. Gehen wir aus von den zwei (festen) Strahlen a und b und dem Trennungsstrahl u, so können wir für zwei weitere Strahlen c und d die Verhältnisse bilden

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} \text{ und } \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

deren Vorzeichen nach 16) zu bestimmen sind.

Dividieren wir den ersten Quotienten durch den zweiten, so nennen wir diesen Ausdruck das „Doppelverhältnis" der vier Strahlen a, b, c, d und bezeichnen ihn durch (abcd), so dass also

$$(abcd) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

Der Unterschied, der zwischen den Strahlen a, b und c, d zunächst gemacht wurde, ist wiederum nur ein scheinbarer. Denn es ist ja

$$(cdab) = \frac{\sin\, ca}{\sin\, da} : \frac{\sin\, cb}{\sin\, db} = \frac{\sin\, ac}{\sin\, ad} : \frac{\sin\, bc}{\sin\, bd} = (abcd).$$

Dagegen haben wir vorerst noch einen Trennungsstrahl nötig.

Für die gegenseitige Lagenbeziehung zweier Strahlenpaare a, b und c, d sind nun folgende Fälle charakteristisch: Man sagt: die Strahlenpaare a, b und c, d „trennen einander", wenn man den Strahl a durch Drehung nicht mit dem Strahle b zur Deckung bringen kann, ohne c oder d zu passieren. (Siehe z. B. Fig. 10.) Kann man dagegen auf einem der beiden Wege a nach b überführen, ohne dabei über c oder d zu kommen, so trennen die beiden Strahlenpaare sich nicht (z. B. Fig. 1). Diese Eigenschaft zweier Strahlenpaare, sich zu trennen, ist ganz unabhängig von der Annahme eines Trennungsstrahles.

Das oben definierte Doppelverhältnis (abcd) von vier Strahlen wird nun negativ, wenn die Strahlen a, b und c, d sich trennen, positiv, wenn dies nicht der Fall. Dann können wir aber auch auf Grund dieser Eigenschaft das Vorzeichen des ganzen Doppelverhältnisses bestimmen und nicht das der Teilquotienten.

Wir lassen also jetzt den Trennungsstrahl weg; dann sind zwar alle Winkel, wie z. B. ac doppeldeutig, der Sinus dieser Winkel aber ist der gleiche, da sie sich zu 180^0 ergänzen; die einzelnen Teilquotienten nehmen wir positiv, das Vorzeichen bestimmen wir am ganzen Ausdruck. Wir erhalten dann die

Definition: „Unter dem Doppelverhältnis (abcd) von vier Strahlen eines Büschels verstehen wir den Ausdruck

$$(abcd) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

der das positive oder negative Vorzeichen erhält, je nach dem die Strahlenpaare a, b und c, d sich nicht trennen oder trennen."

Damit sind wir von einem Trennungsstrahl unabhängig geworden. Ohne denselben können aber die Winkelrelationen von 15) auch nicht mehr angesetzt werden.

Ganz im gleichen Sinn sprechen wir von dem Doppelverhältnis $(\alpha\beta\gamma\delta)$, das vier Ebenen α, β, γ, δ eines Ebenenbüschels bilden: es ist nämlich

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \beta\gamma} : \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \beta\delta}$$

Dabei ist z. B. unter $\alpha\gamma$ einer der Winkel zu verstehen, den die Ebene α mit der Ebene γ bildet.

Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses gegenüber den Operationen des Projizierens und Schneidens.

22. Verbinden wir jetzt die für die Punktreihe und für den Strahlenbüschel unabhängig von einander durchgeführten Betrachtungen, indem wir den Büschel S mit einer Geraden g seiner Ebene zum Schnitt bringen (Fig. 1). Der Strahl a des Büschels schneide g in A, der Strahl b in B u. s. w. Da wir von jedem Strahl des Büschels immer den Halbstrahl auszeichnen, der den Schnittpunkt mit g trägt, so kommt die Betrachtung eigentlich darauf hinaus, dass wir den Parallel-

strahl u durch S zu g als Trennungsstrahl einführen. Schneidet ferner der durch S senkrecht zu g gehende Strahl t in T diese Gerade, so ist

$$(1)\quad 2\,\Delta\, SAC = SA\,.\,SC\,.\,\sin ac = ST\,.\,AC$$
$$(2)\quad 2\,\Delta\, SBC = SB\,.\,SC\,.\,\sin bc = ST\,.\,BC$$
$$(3)\quad 2\,\Delta\, SAD = SA\,.\,SD\,.\,\sin ad = ST\,.\,AD$$
$$(4)\quad 2\,\Delta\, SBD = SB\,.\,SD\,.\,\sin bd = ST\,.\,BD$$

Alle von S aus laufenden Strecken SA, SB u. s. f. wollen wir als positive Zahlen nehmen. Dann folgt aus (1) und (2) durch Division

$$(5)\qquad \frac{SA\,.\,\sin ac}{SB\,.\,\sin bc} = \frac{AC}{BC}$$

Hier stimmt das nach 18) bestimmte Vorzeichen des Streckenquotienten rechts mit dem nach 16) zu bestimmenden Vorzeichen des Sinusquotienten links überein, wie sich geometrisch sofort ergibt. Ebenso liefern die Gleichungen (3) und (4)

$$(6)\qquad \frac{SA\,.\,\sin ad}{SB\,.\,\sin bd} = \frac{AD}{BD}$$

Aus (5) und (6) folgt dann durch Division:

$$(7)\qquad (abcd) = (ABCD)$$

also

Satz 1. „Das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels ist gleich dem analog gebildeten der vier Schnittpunkte, welche irgend eine Gerade mit den vier Strahlen liefert“.*)

Schneiden wir den gleichen Büschel noch mit einer

*) Pappus von Alexandria (4. Jahrh. n. Chr.) Mathematicae collectiones.

zweiten Geraden g_1 (Fig. 2), so folgt, dass auch $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (abcd)$, also in Verbindung mit (7)

(8) $(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1)$ oder

Satz 2. „Irgend vier Strahlen eines Büschels werden von jeder Geraden in vier Punkten von gleichem Doppelverhältnis geschnitten".

Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Projiziert man vier Punkte einer Geraden von einem beliebigen Punkte aus auf eine andere Gerade, so bleibt das Doppelverhältnis der vier Punkte unverändert. Ebenso zeigt die Betrachtung von Fig. 3, dass

$$(ABCD) = (abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1) \text{ also}$$

(9) $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$ oder

Satz 3. „Irgend vier Punkte einer Geraden werden aus jedem Punkte durch vier Strahlen von gleichem Doppelverhältnis projiziert."

Für den Ebenenbüschel gelangen wir zu ganz ähnlichen Sätzen. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Ebenen eines solchen, so ist, wie man leicht ableitet, das Doppelverhältnis $(\alpha\beta\gamma\delta)$ derselben identisch mit dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte, die irgend eine Gerade mit den vier Ebenen liefert oder auch mit dem Doppelverhältnis der vier Strahlen, wonach irgend eine Ebene die vier Ebenen trifft. Diesen Satz und die drei vorigen Sätze können wir in dem allgemeinern zusammenfassen:

Satz 4. „In zwei perspektiven Grundgebilden erster Stufe bilden irgend vier Elemente des einen Grundgebildes und die ihnen entsprechenden des andern das gleiche Doppelverhältnis."

Damit haben wir für perspektive Grundgebilde erster Stufe ausser der Lagenbeziehung auch eine

metrische Beziehung gefunden, welche entsprechende Elemente solcher Gebilde miteinander verknüpft.

Endlich können wir die Operation des Schneidens oder Projizierens nicht bloss einmal, sondern auch öfter vornehmen, ohne dadurch den Wert des Doppelverhältnisses von vier Elementen zu ändern. Wir erhalten demgemäss ganz allgemein

Satz 5. „Leitet man aus vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe durch die beliebig oft angewandten Operationen des Projizierens und Schneidens vier neue Elemente eines andern Grundgebildes ab, so ist das Doppelverhältnis der ersten vier Elemente gleich dem analog gebildeten Doppelverhältnis der letzten vier entsprechenden Elemente. Das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe erweist sich also diesen Operationen gegenüber als eine unveränderliche (invariante) Zahl."

II. Abschnitt:

Harmonische Gebilde.

§ 8. Weitere Eigenschaften des Doppelverhältnisses.

Die Werte der Doppelverhältnisse, die sich aus vier Elementen bilden lassen

23. Den Begriff des Doppelverhältnisses müssen wir noch nach verschiedenen Richtungen hin weiter untersuchen.

Sind vier Elemente eines einförmigen Grundgebildes z. B. vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe gegeben, so können wir sie auf 24 verschiedene Arten zu einem

Doppelverhältnisse zusammenfassen, da man aus vier Elementen 24 Ausdrücke ABCD, ABDC u. s. f. bilden kann. Nicht alle diese Ausdrücke sind aber ihrem Zahlenwert nach verschieden. Wir sahen schon in 19), dass

$$(1) \qquad (ABCD) = (CDAB)$$

Ferner ist auch

$$(BADC) = \frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} \quad \text{also}$$

$$(2) \qquad (BADC) = (ABCD)$$

Vermöge der in (1) und (2) ausgedrückten Sätze: können wir nun aus einem Ausdruck wie (ABCD) noch drei andere ableiten, die den gleichen Zahlenwert besitzen, nämlich

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA)$$

Die 24 verschiedenen Ausdrücke liefern also höchstens 6 verschiedene Zahlenwerte. Ist aber etwa $(ABCD) = \lambda$, so können wir die übrigen Zahlenwerte durch diesen einen wie folgt ausdrücken. Es ist zunächst, wie sich sofort ergibt,

$$(3) \qquad (ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\lambda}$$

Ferner wird

$$(ACBD) = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{(AC + CB)\,(CA + AD)}{CB.\ AD}$$

$$= 1 + \frac{AC.\ AD + CB.\ CA + AC.\ CA}{CB.\ AD}$$

$$= 1 + \frac{AC.\ (BC + CA + AD)}{CB.\ AD} = 1 - \lambda$$

Also

$$(4) \qquad (ACBD) = 1 - (ABCD) = 1 - \lambda.$$

Ganz ähnlich beweist man, dass

$$(5) \qquad (ADCB) = \frac{(ABCD)}{(ABCD)-1} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

Als Endresultat ergeben sich demnach folgende 6 verschiedene Werte, von denen jeder in vierfacher Weise geschrieben werden könnte:

$(ABCD) = \lambda$	$(ABDC) = \frac{1}{\lambda}$
$(ACBD) = 1 - \lambda$	$(ACDB) = \frac{1}{1-\lambda}$
$(ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$	$(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$

Das Doppelverhältnis als Koordinate.

24. Halten wir jetzt von den vier Punkten A B C D drei, etwa A, B, C fest, während D die Punktreihe durchwandert, so wird das Doppelverhältnis (A B C D) für jede Lage von D einen bestimmten Wert annehmen. Fällt insbesondere D in den unendlich fernen Punkt der Punktreihe, den wir mit D_∞ bezeichnen wollen, so wird

$$(ABCD_\infty) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD_\infty}{BD_\infty} = \frac{AC}{BC}$$

weil der Quotient $\frac{AD_\infty}{BD_\infty} = 1$ nach 18). Es reduziert sich also für diesen Punkt das Doppelverhältnis auf ein einfaches Streckenverhältnis. Es wird aber ferner auch jeder Zahlenwert nur bei e i n e r Lage des Punktes erreicht, wie aus dem folgenden Satze sich ergiebt:

Satz 6: „Sind drei Punkte A, B, C auf einer Punktreihe gegeben, sowie ein Zahlenwert λ von bestimmten

Vorzeichen, so gibt es einen und nur einen Punkt D der Punktreihe, welcher mit A, B und C ein Doppelverhältnis $(A\,B\,C\,D) = \lambda$ bildet.“

Denn es ist für diesen gesuchten Punkt D

$$(A\,B\,C\,D) = \lambda = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \text{ also } \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{AC}{BC}$$

Hier muss $\frac{AC}{BC}$ mit einem bestimmten Vorzeichen versehen werden vergl. 18.), so dass auch $\frac{AD}{BD}$ der Grösse und dem Vorzeichen nach gegeben ist, also ist D eindeutig festgelegt.

Natürlich gilt der eben bewiesene Satz in entsprechender Weise auch für den Strahlen- und Ebenenbüschel. Hält man drei Elemente eines Grundgebildes erster Stufe fest, so kann man die Lage eines vierten beweglichen Elementes festlegen durch den Zahlenwert des Doppelverhältnisses, welches dieses vierte Element mit den drei festen bildet. Das Doppelverhältnis dient also als Koordinate, deren Zahlenwerte die einzelnen Elemente liefern.

Aufg. 3. Gegeben sind die Punkte A, B, C einer Punktreihe in der in der Figur 7 angegebenen Anordnung. Man untersuche den Verlauf des Doppelverhältnisses $(A\,B\,C\,D)$, wenn D die Punktreihe durchläuft.

A B C

+ ∞ − 0 + 1 +

Fig. 7.

Eine einfache Betrachtung liefert folgende Zusammenstellung:

D im Unendlichen: . . . $(ABCD) = \frac{AC}{BC}$ . . $+$
D geht vom Unendlichen bis A: (ABCD) . . . $+$
D fällt nach A: . . . . . . „ . . . ∞
D geht von A bis B: . . . „ . . . $-$
D fällt nach B: . . . . . . „ . . . 0
D geht von B nach C: . . . „ . . . $+$
D fällt nach C: . . . . . . „ . . $+1$
D geht von C ins Unendliche: „ . . . $+$

Wir wollen noch ausdrücklich bemerken, dass (ABCD) bloss dann den Wert $+1$ annimmt, wenn der bewegliche Punkt D nach C rückt. — Man führe die entsprechende Betrachtung durch für eine andere Anordnung der Punkte A, B, C.

Aufg. 4. Gegeben sind drei Punkte A, B, C einer

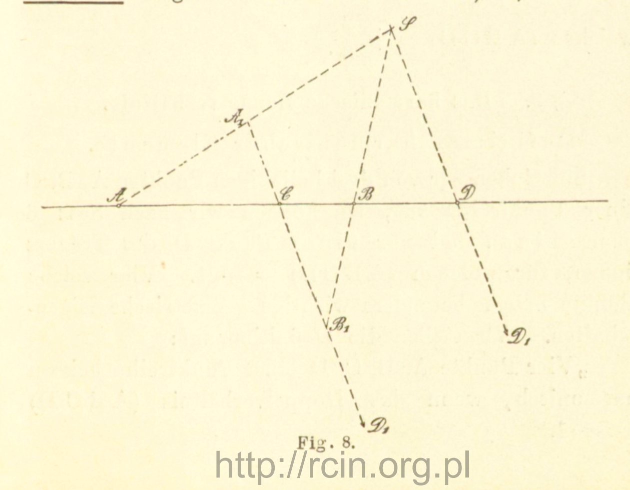


Fig. 8.

Geraden (Fig. 8); man konstruiere einen Punkt D auf der Geraden, so dass $(ABCD) = -\,^2/_3$

Lösung. Wir ziehen durch C irgend eine Gerade und tragen auf ihr die entgegengesetzt gerichteten Strecken $CA_1 = 2$, $CB_1 = 3$ ab unter Zugrundelegung einer ganz beliebigen Masseinheit, konstruieren den Schnittpunkt S der Verbindungslinien AA_1 und BB_1 und ziehen durch S eine Parallele zu $A_1 B_1$, dann schneidet diese Parallele die gegebene Gerade im gesuchten Punkte D. Denn wenn wir C gleichzeitig mit C_1 bezeichnen, den unendlich fernen Punkt von SD dagegen D_1 und die Strahlen von S nach A, B, C, D der Reihe nach a, b, c, d nennen, so ist nach 22) bezw. 24)

$$(abcd) = (ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = \frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} = -\frac{2}{3}$$

Man konstruiere auch noch den Punkt D, für welchen $(ABCD) = +\frac{2}{3}$.

§ 9. Das harmonische Doppelverhältnis.

Definition harmonischer Elemente.

25. Gehen wir von drei beliebigen Punkten A, B, C einer Punktreihe aus, so können wir nach Satz 6 immer einen und nur einen Punkt D des Trägers finden, für welchen $(ABCD) = -1$. Vier solche Punkte haben besonders wichtige geometrische Eigenschaften. Wir stellen die Definition auf:

„Vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe heissen harmonisch, wenn das Doppelverhältnis $(ABCD) = -1$."

Es sind die Punkte A und B einerseits, C und D andererseits einander zugeordnet und aus 20) folgern wir unmittelbar, dass die Punktpaare A, B und C, D sich trennen. Man sagt deswegen wohl auch, dass zwei solche Punktpaare sich harmonisch trennen."

Ganz entsprechend sind vier harmonische Strahlen a, b, c, d eines Strahlenbüschels oder vier harmonische Ebenen $(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta)$ eines Ebenenbüschels dadurch definiert, dass bezüglich $(a\,b\,c\,d) = -1$ oder $(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta) = -1$.

Die 6 Werte von Doppelverhältnissen, welche sich nach 23) aus vier Elementen bilden lassen, reduzieren sich bei vier harmonischen Punkten, also für $\lambda = -1$, ersichtlich auf die folgenden 3 Werte: -1, 2, $1/2$.

Natürlich trennen sich auch hier wieder die beiden Paare von zugeordneten Elementen. Ferner folgt aus Satz 5 von 22) noch:

Satz 7: Vier harmonische Elemente eines Grundgebildes erster Stufe gehen durch die Operationen des Schneidens und Projizierens stets wieder in vier harmonische Elemente über."

Konstruktion harmonischer Elemente.

26. Sind drei Punkte A, B, C, einer Punktreihe gegeben, so gibt es, wie wir bereits wissen, bloss *einen* Punkt D, der zu C harmonisch liegt bezüglich A und B, d. h. so liegt, dass

$$(1) \qquad (A\,B\,C\,D) = -1.$$

Daraus folgt sofort

$$(2) \qquad \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$$

Die Punkte C und D teilen also die Strecke

A B, abgesehen vom Vorzeichen, im gleichen Verhältnis. Diese Bemerkung liefert folgende Konstruktion: Wir ziehen (Fig. 9) durch die gegebenen Punkte A und B zwei beliebige parallele Gerade AA′ und BB′ und durch C eine beliebige Linie, welche diese Parallelen in X und Y' trifft. Schneiden wir

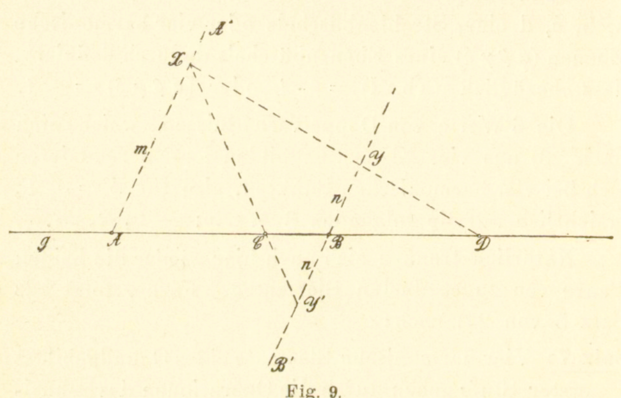


Fig. 9.

dann (mittels des Zirkels) die Strecke BY = Y'B ab, so liefert die Verbindungslinie XY im Schnittpunkt mit g den gesuchten Punkt D. Misst nämlich die Strecke A X m Längeneinheiten, die Strecke B Y und die ihr gleiche BY′ n Längeneinheiten, wobei m und n also positive Zahlen, so ist mit Rücksicht auf die Vorzeichen

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{m}{n} \text{ und } \frac{AD}{BD} = +\frac{m}{n}$$

also in der That die Bedingung (2) und folglich auch (1) erfüllt.

Nehmen wir in Fig. 10 an, die gegebenen Punkte

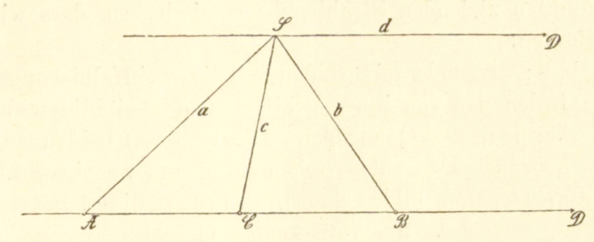


Fig. 10.

liegen so, dass C die Mitte der Strecke AB, dann wird offenbar m = n und XY parallel zu g, der Punkt D rückt ins Unendliche, also

Satz 8: Die Mitte C einer Strecke AB und der unendlich ferne Punkt D des Trägers der Strecke sind vier harmonische Punkte.

Projicieren wir diese vier harmonischen Punkte, aus einem Punkte S, so erhalten wir nach Satz 4 vier harmonische Strahlen a, b, c, d. Man benutze diese Betrachtungen zur Lösung der

Aufg. 5: Gegeben sind drei Strahlen a, b, c eines Büschels; man konstruiere den 4. harmonischen Strahl d zu c bezüglich a und b.

Ein einfacher Satz über harmonische Strahlen ergibt sich ferner durch folgende Betrachtung: Ist ABC ein Dreieck und halbiert man den Winkel bei A sowie dessen Nebenwinkel durch Linien, welche die Seite BC beziehungsweise in D und E treffen, so teilen nach bekannten planimetrischen Sätzen die Punkte D und E die Seite BC im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten, also sind B, C, D, E harmonisch, (BCDE) = − 1 und es sind also auch die aus A nach diesen

Punkten zielenden Strahlen harmonisch, so dass wir erhalten:

Satz 9: „Irgend zwei Strahlen und die zwei Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel bilden ein harmonisches Quadrupel. Die letzteren beiden zugeordneten Strahlen stehen auf einander senkrecht."

Aufg. 6: Man bilde eine Umkehrung dieses Satzes.

§ 9. Das vollständige Viereck.

Geometrische Definition von vier harmonischen Punkten.

27. Vier harmonische Punkte lassen sich nun nicht bloss durch die analytische Beziehung definieren, dass ihr Doppelverhältnis den Zahlenwert — 1 besitzt, sondern auch durch eine rein geometrische, durch eine Lagenbeziehung, wie wir jetzt zeigen wollen.

Sind vier Punkte E, F, G, H in einer Ebene ganz beliebig gegeben, (Fig. 11a oder Fig. 11b,) so be-

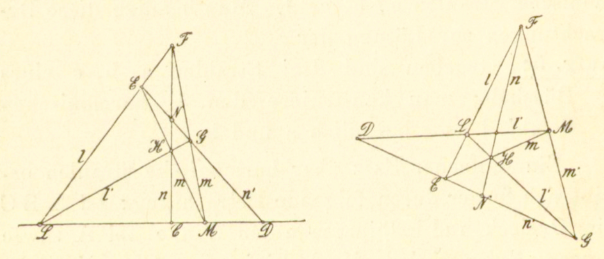


Fig. 11 a. Fig. 11 b.

stimmen sie zunächst 6 Linien, welche je zwei dieser vier Punkte verbinden. Die Gesamtheit dieser 6 Linien nennen wir das „vollständige Viereck" der Punkte E, F, G, H. Die 6 Linien heissen die „Seiten", die Punkte E, F, G, H die „Ecken" des Viereckes. Zu jeder

Seite des vollständigen Viereckes z. B. zur Verbindunglinie EF oder l können wie eine zweite, in diesem Falle die Verbindungslinie GH oder l' finden derart, dass zwei solche Seiten zusammen alle die vier gegebenen Ecken des Viereckes enthalten. Wir nennen zwei solche Seiten „Gegenseiten" des vollständigen Viereckes und erhalten augenscheinlich 3 Paare von Gegenseiten, l, l'; m, m'; n, n'. Je zwei zusammengehörige Gegenseiten liefern endlich noch einen Schnittpunkt, nämlich l und l' den Punkt L, m und m' den Punkt M und n und n' den Punkt N. Diese drei Punkte L, M, N heissen wohl auch „Nebenecken" des Viereckes.

Der Zusammenhang dieser Figuren mit harmonischen Punkten wird nun hergestellt durch folgenden

Satz 10: „Greift man zwei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Viereckes heraus, so liefern sie zwei Nebenecken. Auf ihrer Verbindungslinie schneidet dann das letzte Paar von Gegenseiten zwei Punkte aus, die zu den zwei ersten Nebenecken harmonisch liegen."

Denn nehmen wir L und M als Nebenecken, die verbunden werden und schneidet das letzte Paar von Gegenseiten n, n' diese Verbindungslinie in C und D,*) so hat man

(1) $$(LMCD) = (EGND)$$

wie sich ergibt, wenn man die links stehenden Punkte aus dem Punkte F auf n' projiziert (Satz 2). Projiziert man aber die letzten vier Punkte aus H auf LM, so wird

(2) $$(EGND) = (MLCD)$$

*) In Fig. 11b ist noch der Punkt C einzutragen statt des einen l'.

also folgt

$$(3) \qquad (L M C D) = (M L C D).$$

Andererseits ist aber allgemein vergl. 23)

$$(M L C D) = \frac{1}{(L M C D)}$$

mithin in 3)

$$(L M C D)^2 = 1.$$

Es kann also das Doppelverhältnis der vier Punkte L, M, C, D bloss die Werte + 1 oder — 1 haben. Der Wert + 1 ist aber ausgeschlossen, da er nach 24) Aufg. 3 bloss erreicht wird, wenn von den vier Punkten des Doppelverhältnisses zwei zusammenfallen. Dies ist in unserer Figur aber nicht möglich. Es muss folglich sein

$$(LMCD) = -1$$

d. h. die vier Punkte liegen harmonisch.

Es sind dann auch E, G, N, D vier harmonische Punkte und die Strahlen von F oder H aus nach ihnen sind ebenfalls harmonisch.

Wir benutzen diese Eigenschaft des vollständigen Vierecks, um eine zweite Lösung zu gewinnen für die

Aufg. 7. Gegeben sind drei Punkte A, B, C auf einer Geraden; zu C den 4. harmonischen bezüglich A und B zu konstruieren.

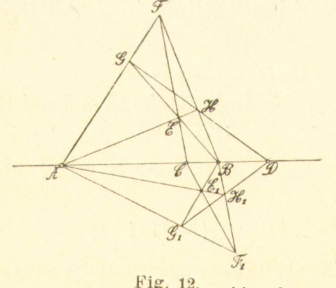


Fig. 12.

Wir ziehen (Fig. 12) durch den gegebenen Punkt C eine beliebige Gerade, wählen auf ihr zwei beliebige Punkte E

und F, ziehen die Verbindungslinien EA, EB, sowie FA und FB. Ist dann G der Schnittpunkt von FA und BE, ferner H der Schnittpunkt von FB und AE, so liefert GH auf der gegebenen Geraden den 4. harmonischen Punkt D. Der Beweis ergibt sich sofort aus der Betrachtung des vollständigen Vierecks EFGH.

Natürlich kann man die verschiedensten Vierecke zur Konstruktion benutzen. In der Figur ist noch ein zweites Viereck E_1 F_1 G_1 H_1 gezeichnet. Es muss dann G_1 H_1 durch den gleichen Punkt D gehen.

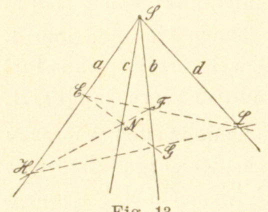
Diese Konstruktion erfordert bloss das Ziehen von geraden Linien, ist also mittels des Lineals allein ausführbar, während bei der in 26) gegebenen Lösung auch der Zirkel benutzt werden musste.

Liegen umgekehrt vier harmonische Punkte A, B, C, D gegeben vor und zeichnet man in der eben durchgeführten Weise zu A und B den 4. harmonischen bezüglich C, so muss dieser mit D zusammenfallen.

Zu bemerken ist noch, dass in Bezug auf das vollständige Viereck die beiden Punktpaare der harmonischen Gruppe eine verschiedene Rolle spielen, indem nämlich A und B Nebenecken sind, während durch C und D die Gegenseiten laufen. Wir wissen aber schon aus dem Früheren (19), dass die beiden Punktpaare in einem Doppelverhältnis durchaus übereinstimmend zu behandeln sind. Auch geometrisch wäre für die harmonischen Punkte diese Gleichberechtigung der beiden Paare durch Konstruktion eines anderen Vierecks leicht zu erweisen.

Aufg. 8. Die Strahlen a, b, c eines Büschels sind ge-

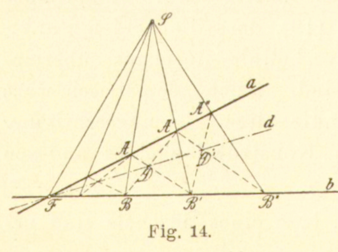
geben, zu c den 4. harmonischen bezüglich a und b zu konstruieren.


Fig. 13.

Wir wählen auf c einen Punkt N beliebig (Fig. 13), ziehen durch ihn zwei beliebige Gerade EG und HF, bringen EF und HG in L zum Schnitt, dann ist SL der verlangte Strahl d. Die Konstruktion erfordert bloss das Ziehen von geraden Linien, ist „linear“, wie wir sagen.

Anwendungen des Satzes vom vollständigen Viereck.

28. Hat man in einer Ebene zwei gerade Linien a und b und einen Punkt S und ziehen wir durch S beliebige Gerade, welche a und b je in A, B, A', B', u. s. f. schneiden (Fig. 14); ziehen wir ferner AB' und A'B, welche einen Punkt D liefern, A'B'' und A''B', welche sich in D' schneiden u. s. f., so liegen alle so konstruierten Punkte D auf einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt T der gegebenen Geraden a und b hindurchgeht.


Fig. 14.

Denn verbinden wir T mit S und D und nennen diese Strahlen s und d, so sind a, b, s, d vier harmonische Strahlen, wie sich aus dem Viereck AA'B'B ergibt, also (absd) =

— 1. Zu den drei Strahlen a, b, s, gibt es aber bloss einen 4. harmonischen, also müssen alle Punkte D auf einem Strahl durch T liegen.

Aufg. 9. Gegeben sind in einer Ebene zwei Gerade a und b, deren Schnittpunkt nicht mehr gezeichnet werden kann und ein Punkt D. Man soll diesen Punkt D mit dem unzugänglichen Schnittpunkt durch eine Gerade verbinden.

Man benutze den eben bewiesenen Satz und ziehe durch D (vergl. Fig. 14) irgend zwei Gerade AB' und A'B. Dann liefern AB und A'B' einen Punkt S. Irgend eine durch S weiter gezogene Gerade, welche a und b in A'' und B'' trifft, bestimmt einen Punkt D', der mit D verbunden, die gesuchte Gerade gibt.

Anmerkung. Dem vollständigen Viereck entspricht nach dem Gesetz der Dualität in der Ebene (7, a) das vollständige Vierseit. Dies wird gebildet von vier ganz beliebigen Geraden einer Ebene, den „Seiten“ des Vierseites. Diese bestimmen 6 Schnittpunkte oder „Ecken“, welche wieder in 3 Paare von „Gegenecken“ zerfallen derart, dass durch ein Paar Gegenecken alle vier Seiten hindurchgehen. Mittels dieser Figur erhält man dann in durchaus analoger Weise eine rein geometrische Definition für vier harmonische Strahlen.

In der reinen Geometrie der Lage kann man harmonische Elemente auf Grund ihrer geometrischen Eigenschaft behandeln; das Doppelverhältnis dagegen in der hier gegebenen Definition ist auszuschliessen wegen der vorkommenden Strecken oder Winkel. Irgend vier gegebene Elemente eines Grundgebildes erster Stufe bezeichnet man in der Geometrie der Lage als einen „Wurf“.

§ 11. Metrische Relationen bei harmonischen Gebilden.

29. Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so ist also (ABCD) $= -1$ oder

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$$

Ist weiter (Fig. 15) M die Mitte der Strecke AB‘ so können wir die letzte Gleichung auch schreiben:

$$\frac{AM + MC}{BM + MC} = \frac{DM + MA}{BM + MD}$$

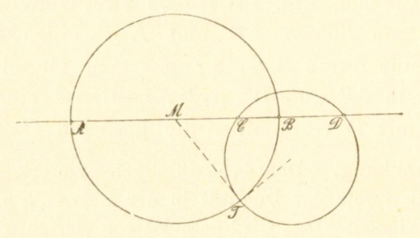


Fig. 15.

Multipliziert man aus, so ergibt sich unter Rücksicht auf die Gleichung AM = MB

$$(1) \qquad MC \,.\, MD = MA^2 = MB^2$$

Dies liefert einen leicht in Worte zu fassenden Satz über harmonische Punkte. Ist umgekehrt Gleichung (1) erfüllt, so liegen die Punkte harmonisch.

Legen wir jetzt durch die Punkte C und D irgend einen Kreis und von M aus eine Tangente an ihn, so ist MC . MD die Potenz des Punktes M in Bezug auf diesen Kreis und = dem Quadrat der Tangente. Ist T der Berührungspunkt, so hat man demnach

$$(2) \qquad MT^2 = MC \,.\, MD.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$MT = MA = BM$$

d. h. T liegt auf dem Kreise über AB als Durchmesser. Die Tangenten an die beiden Kreise in T stehen also aufeinander senkrecht oder anders ausgedrückt: die beiden Kreise schneiden sich rechtwinklig oder orthogonal. Wir haben also den

Satz 11: „Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so schneidet jeder Kreis durch die beiden zugeordneten Punkte C und D den über AB als Durchmesser beschriebenen Kreis orthogonal."

Aufg. 10. Sind a, b, c, d vier harmonische Strahlen, so dass also $(abcd) = -1$ und ist m einer der Strahlen, welche den Winkel von a und b halbieren, so beweise man die der Gleichung (1) entsprechende Relation:

$$tg(mc) \,.\, tg(md) = tg^2(ma) = tg^2(mb)$$

III. Abschnitt.

Die projektive Beziehung der einförmigen Grundgebilde.

§ 12. Die konstruktive Behandlung der projektiven Beziehung.

Definition projektiver Grundgebilde.

30. An perspektiven Grundgebilden erster Stufe haben wir im I. Abschnitt zweierlei Eigenschaften als charakteristisch erkannt: die Eigenschaft der Lage (13) und die daraus sich ergebende metrische Eigenschaft der Gleichheit der Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Elementen (22). Denken wir uns nun in zwei

perspektiven Grundgebilden erster Stufe z. B. zwei Punktreihen g und g_1 (Fig. 2) die sämtlichen, entsprechenden Punkte wie A und A_1, B und B_1 u. s. f. in irgend einer Weise an den (etwa als materiell gedachten) Punktreihen markiert. Dann heben wir den geometrischen Zusammenhang zwischen den Punktreihen g und g_1 und dem Strahlenbüschel S auf, indem wir g und g_1 in irgend eine beliebige Lage bringen. Während dadurch die perspektive Lagenbeziehung zerstört wird, bleibt die metrische Eigenschaft nach wie vor erhalten. Wir nennen die Punktreihen dann noch „projektiv" — wofür auch das Zeichen $\overline{\wedge}$ gebraucht wird. Allgemein stellen wir auf als

Definition: Zwei Grundgebilde erster Stufe heissen projektiv, wenn sie eindeutig, Element für Element, dadurch aufeinander bezogen sind, dass je vier Elemente des einen Gebildes und die vier entsprechenden des andern das gleiche Doppelverhältnis bilden.

Um uns solche projektive Grundgebilde zu verschaffen, steht uns zunächst kein anderes Mittel zu Gebote, als dass wir zwei Grundgebilde perspektiv auf einander beziehen und dann gewissermassen „auseinandernehmen." Es ist aber leicht, auch direkt eine projektive Beziehung zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe zu vermitteln.

Konstruktion projektiver Punktreihen.

31. Wir führen dies zunächst durch für zwei Punktreihen, deren Träger g und g_1 sich in einer Ebene befinden mögen. Irgend drei beliebigen Punkten A, B,

C auf g ordnen wir drei beliebige Punkte A_1, B_1, C_1 auf g_1 zu. Wir verbinden (Fig. 16) A mit A_1 und

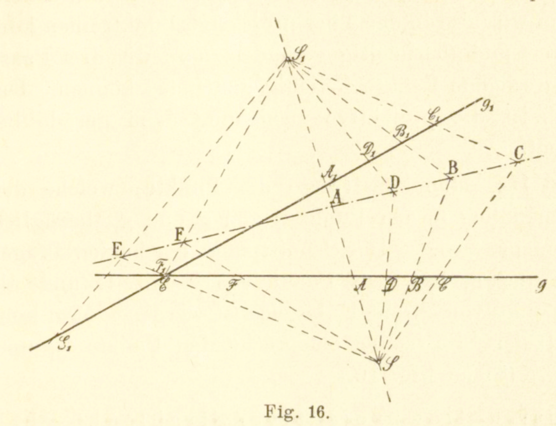


Fig. 16.

wählen auf dieser Verbindungslinie zwei beliebige Punkte S und S_1. Die Linien SB und S_1B_1 mögen sich in **B**, SC und S_1C_1 in **C** schneiden. Wir verbinden **B** mit **C** durch eine Linie p, welche AA_1 in **A** treffen möge. Zu einem beliebigen Punkte D von g verschaffen wir uns jetzt einen entsprechenden auf g_1 in folgender Weise: SD trifft p in **D** und S_1**D** schneidet dann g_1 in einem Punkte D_1, der dem Punkte D zugewiesen wird. Dann ist offenbar für j e d e Lage von D nach den Sätzen von 22)

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (\mathbf{ABCD})$$

Beschreibt D die eine Punktreihe, so durchwandert D_1 die andere und es sind immer die Büschel S und S_1 je perspektiv zur Punktreihe **A**, **B**, **C** . . . auf p und also auch zu einander perspektiv. Es bilden folg-

lich auch irgend vier Punkte auf g und die vier entsprechenden auf g_1 das gleiche Doppelverhältnis. Damit haben wir also in der That projektive Punktreihen konstruiert und gleichzeitig gefunden, dass wir drei Paare entsprechende Punkte beliebig annehmen können. Dadurch ist die projektive Beziehung dann gerade bestimmt.

Aufg. 11. Man konstruiere die Punkte, welche den unendlich fernen Punkten von g und g_1 bezüglich entsprechen. — Der Schnittpunkt der beiden Träger g und g_1 kann als Punkt von g mit E und als Punkt von g_1 mit F_1 bezeichnet werden. Man konstruiere die beiden entsprechenden Punkte E_1 und F. (Siehe Fig. 16.)

Konstruktion projektiver Strahlenbüschel.

32. Zwei in einer Ebene befindliche Strahlenbüschel projektiv aufeinander zu beziehen, gelingt durch die entsprechende duale Betrachtung. Wir greifen im Büschel S drei beliebige Strahlen a, b, c heraus, denen wir im Büschel S_1 drei beliebige Strahlen a_1, b_1, c_1 zuordnen (Fig. 17). Durch den Schnittpunkt von a und a_1 ziehen wir willkürlich zwei Gerade g und g_1 und bringen g in A, B, C zum Schnitt mit den Strahlen a, b, c, die Gerade g_1 hingegen mit a_1, b_1, c_1 in A_1,

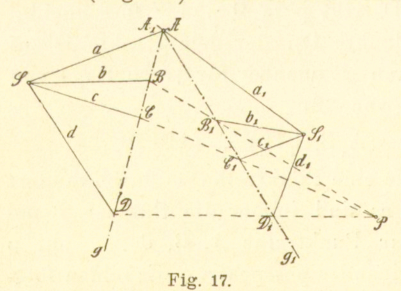


Fig. 17.

B_1, C_1. Dann liefern die Verbindungslinien BB_1 und CC_1 in ihrem Schnitte einen Punkt P. Zu einem beliebigen Strahl d des Büschels S finden wir nun, wie folgt, den entsprechenden: d trifft g in D, DP trifft g_1 in D_1 und S_1D_1 ist der entsprechende Strahl d_1 im Büschel S_1.

Dann ist wieder

$$(a\ b\ c\ d) = (a_1\ b_1\ c_1\ d_1)$$

Die Punktreihen auf g und g_1, welche durch entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1 ausgeschnitten werden, sind perspektiv.

Aufg. 12. „Man zeichne in den beiden projektiven Büscheln die Strahlen e_1 und f, welche dem Verbindungsstrahl SS_1 entsprechen, wenn dieser als e und f_1 genommen wird“.

Um eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel projektiv aufeinander zu beziehen, schneiden wir den Büschel mit einer Geraden in einer Punktreihe und beziehen diese auf die gegebene Punktreihe.

Wären ein Ebenenbüschel und ein Strahlenbüschel in projektive Beziehung zu setzen, so bringen wir die Ebene des Strahlenbüschels zum Schnitt mit dem Ebenenbüschel und beziehen die beiden Strahlenbüschel projektiv aufeinander.

Zusatz. Statt durch eine geometrische Konstruktion können wir uns die projektive Beziehung auch von Anfang an durch eine Doppelverhältnisrelation festgelegt denken. Sind z. B. g und g_1 die Träger zweier Punktreihen und A, B, C, sowie A_1, B_1, C_1, beliebig auf ihnen ausgewählt, so bildet ein beliebiger Punkt D

auf g mit A, B, C ein Doppelverhältnis von bestimmtem Wert $(ABCD) = \lambda$. Dann giebt es auf g_1 einen Punkt D_1, für welchen $(A_1\, B_1\, C_1\, D_1) = \lambda$. Dies ist der D entsprechende Punkt D_1. Es gilt also die Beziehung

$$(ABCD) = (A_1\, B_1\, C_1\, D_1).$$

Die angeführten Konstruktionen lehren, Elemente zu finden, die stets dieser oder einer entsprechenden Beziehung genügen.

Es drängt sich aber noch die Frage auf: Ist vielleicht die soeben direkt begründete, projektive Beziehung allgemeinerer Art als die Beziehung, in der zwei perspektive Grundgebilde stehen, nachdem ihre gegenseitige Lagenbeziehung aufgehoben ist?

Dies ist bei den Grundgebilden erster Stufe in der That nicht der Fall. Denn wir wollen im folgenden Paragraphen zeigen, dass sich zwei projektive Grundgebilde erster Stufe stets in perspektive Lage bringen (perspektiv „orientieren") lassen.

§ 13. Die perspektive Orientierung projektiver Grundgebilde erster Stufe.

Projektive Punktreihen, in perspektive Lage gebracht.

33. Liegen zwei, in der soeben beschriebenen Weise projektiv auf einander bezogene Punktreihen g und g_1 vor, in denen also irgend vier Punkten der einen vier Punkte, der andern entsprechen vom gleichen Doppelverhältnis, so seien E und E_1 irgend zwei einander entsprechende Punkte. Dann gilt für irgend drei weitere entsprechende Punktpaare A, A_1, B, B_1, C, C_1 die Relation

$$(1) \qquad (A\ B\ C\ E) = (A_1\ B_1\ C_1\ E_1)$$

Bringen wir nun g und g_1 in eine solche gegenseitige Lage, dass E_1 auf E zu liegen kommt, während die Träger g und g_1 selbst nicht zusammenfallen. Wir verbinden A mit A_1, B mit B_1 und zeichnen den Schnittpunkt S dieser Verbindungsstrahlen.*) Dann geht auch die Linie CC_1 durch diesen Punkt S. Denn angenommen, die Verbindungslinie SC_1 treffe g in C′, so ist nach 22)

$$(2) \qquad (A\,B\,C'\,E) = (A_1\,B_1\,C_1\,E_1)$$

also mit Rücksicht auf (1)

$$(3) \qquad (A\,B\,C'\,E) = (A\,B\,C\,E)$$

Dann muss aber notwendig C′ mit C zusammenfallen, also C′ = C sein; denn es giebt nach 24) nur einen Punkt C, der mit A, B und E ein Doppelverhältnis von gegebenem Werte (A B C E) bildet. Ganz in der gleichen Weise zeigt man, dass jede Verbindungslinie irgend zweier anderer entsprechender Punkte wie D und D_1 etc. auch immer durch den Punkt S gehen muss. Die beiden Punktreihen sind also dargestellt als Schnitte des Büschels S, sie sind in perspektive Lage gebracht.

Dies ist offenbar noch auf unendlich verschiedene Arten möglich, da ja nur nötig war, irgend zwei entsprechende Punkte der projektiven Punktreihen im Schnittpunkt der beiden Träger zur Deckung zu bringen. Der Punkt S heisst wohl auch das „Centrum der Perspektivität“. Wir erhalten also den

*) Es wird dem Leser dringend geraten, die Figuren nach den Angaben dss Textes stets selbst zu entwerfen, auch wenn sie beigedruckt sind. Es erleichtert das Verständnis ungemein, wenn man die Figur, Schritt für Schritt der Entwicklung folgend, erst allmählich entstehen sieht.

Satz 12: „Hat man zwei projektive Punktreihen g und g_1 und liegen im Schnittpunkte der beiden Träger entsprechende Punkte der Punktreihen vereinigt, während die Träger g und g_1 selbst nicht zusammenfallen, so liegen die beiden Punktreihen perspektiv, d. h. alle Verbindungslinien entsprechender Punkte von g und g_1 laufen durch einen Punkt, das Centrum der Perspektivität".

Projektive Strahlenbüschel, in perspektive Lage gebracht.

34. Um zwei in einer Ebene befindliche, projektive Strahlenbüschel S und S_1 in perspektive Lage zu bringen, greifen wir irgend zwei entsprechende Strahlen e und e_1 heraus und bringen sie zur Deckung jedoch so, dass S und S_1 nicht aufeinander zu liegen kommen. Dann zeigt die duale Betrachtung, dass die Büschel perspektiv liegen. Dies liefert den

Satz 13: Liegen zwei in einer Ebene befindliche, projektive Strahlenbüschel so, dass in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte entsprechende Strahlen der beiden Büschel vereinigt sind, während die Mittelpunkte nicht zusammenfallen, so sind die Büschel „perspektiv" d. h. alle entsprechenden Strahlen schneiden sich auf einer Geraden, der „Achse der Perspektivität".

Die Aufgabe, eine Punktreihe und einen zu ihr projektiven Strahlenbüschel perspektiv zu legen, verlangt, den Büschel so zu orientieren, dass drei Strahlen a, b, c durch die ihnen entsprechenden Punkte A, B, C der Punktreihe gehen. (Beweis!) Dies ist auf Grund planimetrischer Sätze leicht durchführbar.

Mehr Schwierigkeiten bietet es, einen Strahlenbüschel und einen zu ihm projektiven Ebenenbüschel in perspektive Lage zu bringen. Wir übergehen die Lösung, da sie für das Folgende ohne Belang ist.

§ 13. **Anwendungen.**

35. Fügen wir noch bei, dass die in § 12 gegebenen Konstruktionen der projektiven Beziehung noch manche Spezialisierungen zulassen. So kann man z. B. bei der Konstruktion der projektiven Punktreihen in 25) die auf dem Verbindungsstrahl $A\,A_1$ noch ganz beliebig angenommenen Punkte S und S_1 auch so wählen, dass S nach A_1 und S_1 nach A fällt. Dann hat man zur Durchführung der gleichen Betrachtung wie damals die Linienpaare

$$\left.\begin{matrix} A\ B_1 \\ A_1\ B \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} A\ C_1 \\ A_1\ C \end{matrix}\right\}$$

zu benutzen, deren erstes einen Punkt **B**, das zweite einen Punkt **C** liefert, (Fig. 18), während die Verbin-

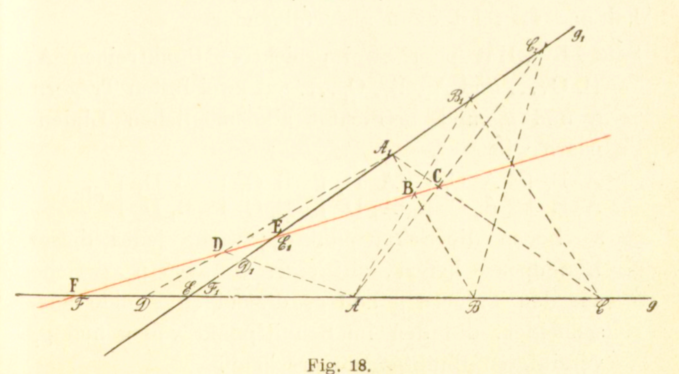


Fig. 18.

dungslinie **B C** der perspektive Schnitt der Büschel A und A_1 ist, den wir mit p_0 bezeichnen wollen. Irgend zwei entsprechende Punkte D und D_1 der projektiven Punktreihen sind daraus zu erhalten, dass das Linienpaar

$$\left.\begin{matrix} A\,D_1 \\ A_1\,D \end{matrix}\right\}$$

einen auf p_0 gelegenen Schnittpunkt **D** besitzt. Konstruiert man jetzt wieder die dem Schnittpunkt von g und g_1 entsprechenden Punkte, so liefert die Figur unmittelbar das Ergebnis, dass dies die Punkte E_1 und F sind, in denen p_0 den Trägern g_1 und g begegnet.

Ist nun die projektive Beziehung von g und g_1 gegeben, so sind damit diese Punkte E_1 und F und also auch p_0 bestimmt. Ebensogut wie nach A und A_1 hätten wir die Hilfspunkte S_1 und S aber auch nach B und B_1 oder nach C und C_1 u. s. w. verlegen können und müssen dadurch die gleiche Achse p_0 erhalten. Es folgt dann aber folgender

Satz 14. „Hat man zwei projektive Punktreihen A, B, C .... und A_1, B_1, C_1 .... auf zwei festen Trägern g und g_1 und betrachtet alle möglichen Linienpaare wie

$$\left.\begin{matrix} A\,B_1 \\ A_1\,B \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} A\,C_1 \\ A_1\,C \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} A\,D_1 \\ A_1\,D \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} B\,C_1 \\ B_1\,C \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} B\,D_1 \\ B_1\,D \end{matrix}\right\} \text{ etc.}$$

so liegen die Schnittpunkte, welche jedes dieser Linienpaare liefert, auf einer Geraden p_0, welche aus den Trägern g und g_1 diejenigen Punkte ausschneidet, die den im Schnittpunkt von g und g_1 vereinigten Punkten entsprechen“.

Aufg. 13. Für zwei in einer Ebene befindliche, projektive Strahlenbüschel lässt sich ein entsprechender Satz aufstellen. Man beweise ihn.

Der Satz von Desargues.

36. Als ein Zeichen für die Brauchbarkeit dieser Betrachtungen erweisen wir noch folgenden sehr bekannten Satz:

Satz 15: „Wenn zwei in einer Ebene gelegene Dreiecke A_1 B_1 C_1 und A_2 B_2 C_2 die Eigenschaft haben, dass 1) die Verbindungslinien A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2 durch einen Punkt gehen, so weiss man, dass 2) die Schnittpunkte von A_1 B_1 und A_2 B_2, A_1 C_1 und A_2 C_2, B_1 C_1 und B_2 C_2 auf einer Geraden liegen und aus 2) folgt auch umgekehrt 1)".

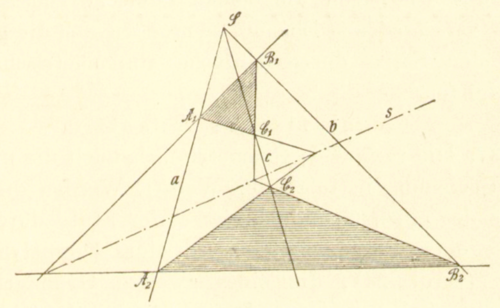


Fig. 19.

Nehmen wir drei durch einen Punkt S gehende Strahlen a, b, c (Fig. 19) und auf ihnen bezüglich die Punktpaare A_1, A_2, B_1, B_2 und C_1, C_2, so ist damit die Bedingung 1) für die beiden Dreiecke A_1 B_1 C_1 und A_2 B_2 C_2 erfüllt. Betrachten wir nun den Büschel S, so schneidet derselbe die Geraden A_1 B_1 und A_2 B_2

in zwei perspektiven Punktreihen. Diese perspektiven Punktreihen projizieren wir aus C_1 und C_2 beziehungsweise. Dann sind diese Büschel C_1 und C_2 projektiv und, wie man leicht erkennt, überdies perspektiv, da der Verbindungsstrahl $C_1 C_2$ sich selbst entspricht. Es schneiden sich aber entsprechende Strahlen auf einer Geraden, der Achse der Perspektivität: also müssen auf einer Geraden S liegen: der Schnittpunkt von $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$, der Schnittpunkt von $B_1 C_1$ und und $B_2 C_2$ und der Schnittpunkt von $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, (da nach ihm auch entsprechende Strahlen der Büschel C_1 und C_2 laufen). Damit ist der Satz bewiesen. Ganz ähnlich verfährt man bei der Umkehrung desselben.

Zusatz. Liegen die beiden Dreiecke von Anfang an in verschiedenen Ebenen, so ergeben sich die gleichlautenden Sätze durch einfache stereometrische Betrachtungen.

Analytischer Ansatz.

37. Die rechnende Geometrie behandelt die projektive Beziehung in folgender Weise: Werden die Elemente des einen Grundgebildes erster Stufe durch die Werte eines Paramters λ, z. B. eines Doppelverhältnisses (vergl. 24), die eines zweiten Grundgebildes durch einen Parameter μ festgelegt und besteht zwischen λ und μ eine in Bezug auf jede dieser Grössen lineare Relation:

$$(1) \qquad \alpha \lambda \mu + \beta \lambda + \gamma \mu + \delta = o$$

wo α, β, γ, δ beliebige, aber feste Zahlenwerte sind, so ordnet diese Gleichung, nach λ oder nach μ aufgelöst, jedem Wert des einen Parameters einen des

andern zu. Es sind also auch die beiden Grundgebilde erster Stufe dadurch eindeutig, Element für Element, auf einander bezogen. Weiter zeigt man: Sind die beiden Grundgebilde eindeutig auf einander bezogen und zwar durch eine solche Relation wie (1), so folgt daraus schon, dass vier Elemente des einen Grundgebildes und ihre vier entsprechenden das gleiche Doppelverhältnis bilden, d. h. dass die Grundgebilde projektiv sind. Eine Relation (1) stellt also den analytischen Ausdruck der Projektivität dar.

Wir wollen dies am einfachsten Beispiel zweier projektiven Punktreihen g und g_1 noch genauer verfolgen. Auf g wird ein Punkt O willkürlich angenommen und ein beliebiger Punkt P von g durch seine Abscisse OP = x festgelegt, deren Zahlenwert nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten Seite negativ genommen wird. Ebenso werden die Punkte von g_1 durch Abscissen x_1 dargestellt. Zwischen diesen Parametern möge jetzt eine Gleichung bestehen

$$(2) \quad \alpha\, x\, x_1 + \beta\, x + \gamma\, x_1 + \delta = o$$

Dann ist vermöge derselben auch

$$(3) \quad x = -\frac{\gamma\, x_1 + \delta}{\alpha\, x_1 + \beta} \text{ und } x_1 = -\frac{\beta\, x + \delta}{\alpha\, x + \gamma}$$

Diese Gleichungen gestatten, zu jedem x oder x_1 das entsprechende x_1 oder x zu berechnen. Der Ausdruck für das Doppelverhältnis von vier Punkten P, P′, P″, P‴ wird aber, wie man sofort erkennt,

$$(4) \quad (P\, P'\, P''\, P''') = \frac{x - x''}{x' - x''} : \frac{x - x'''}{x' - x'''}$$

wenn P′ durch die Abscisse x′ u. s. f. gegeben ist.

Den vier Punkten P, P', P'', P''' entsprechen vier andere Punkte P_1, P_1', P_1'', P_1''' auf g_1, die gegeben sind durch die Abscissen

$$x_1 = - \frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \; x_1' = - \frac{\beta x' + \delta}{\alpha x' + \gamma} \text{ etc.}$$

Dann zeigt eine leichte Rechnung, dass

$$(P_1 \, P_1' \, P_1'' \, P_1''') = (P \, P' \, P'' \, P''')$$

§ 15. Metrische Relationen. Spezielle Fälle.

Die Fluchtpunkt-Relation.

38. Führen wir in die Beziehung, welche die Gleichheit der Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Punkten in zwei projektiven Punktreihen zum Ausdruck bringt, die uneigentlichen Punkte der beiden Träger g und g_1 ein, so erhalten wir eine metrische Relation im speziellen Sinn, indem die Doppelverhältnisse in einfache Verhältnisse übergehen. Denken wir uns nämlich die beiden Punktreihen irgendwie perspektiv gelegt und sind (Fig. 2) R und Q_1 die den unendlich fernen Punkten von g_1 und g entsprechenden Punkte, die wir als „Fluchtpunkte" bezeichnen, so hat man

$$(A \; B \; R \; Q) = (A_1 \; B_1 \; R_1 \; Q_1)$$

und daraus mit Rücksicht auf 24)

$$\frac{AR}{BR} = \frac{B_1Q_1}{A_1Q_1} \text{ oder}$$

$$AR. \; A_1Q_1 = BR. \; B_1Q_1$$

Es sind also alle diese Rechtecke, je mit entsprechenden Punkten A, A_1, B, B_1, C, C_1 .... gebildet, flächengleich. Den gemeinsamen Flächeninhalt derselben erhält man

auch, wenn man das im Schnittpunkt der Träger vereinigte Punktpaar E, E_1 herausgreift, für welches

$$ER. \; E_1Q_1 = Q_1S. \; RS = k$$

Es ist also

$$AR. \; A_1Q_1 = BR. \; B_1Q_1 = \dots\dots = k = \text{const.}$$

Aehnliche, kongruente Punktreihen.

39. Aus der allgemeinen, projektiven Beziehung zweier Punktreihen ergeben sich ferner spezielle, wenn wir die uneigentlichen Punkte besonders berücksichtigen, was dadurch möglich ist, dass wir die unendlich fernen Punkte der beiden Träger in der projektiven Beziehung einander entsprechen lassen. Dann ist also, wenn Q und Q_1 diese unendlich fernen Punkte sind,

$$(A\;B\;C\;Q) = (A_1\;B_1\;C_1\;Q_1) \text{ folglich}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} \text{ oder auch}$$

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = c$$

Es muss also überhaupt das Verhältnis irgend zweier entsprechenden Strecken unveränderlich $= c$ sein. Solche Punktreihen heissen „ähnlich“.

Ist ferner $c = 1$, so sind je zwei entsprechende Strecken gleich lang, die projektiven Punktreihen heissen dann „kongruent“.

Aufg. 14. Man zeige, dass man ähnliche (unter Umständen kongruente) Punktreihen enthält, wenn man zwei parallele Gerade mit einem beliebigen Strahlenbüschel oder zwei beliebige Gerade mit einem Parallelstrahlenbüschel schneidet.

Ebenso heissen zwei projektive Strahlenbüschel

kongruent, wenn irgend zwei Strahlen den gleichen Winkel einschliessen wie die ihnen entsprechenden. Solche Strahlenbüschel erhält man z. B. wenn man eine Punktreihe aus zwei Punkten S und S_1 projiziert, die gleichweit entfernt von derselben und auf einer Senkrechten zu ihr liegen.

IV. Abschnitt.

Die projektive Beziehung auf dem gleichen Träger.

§ 16. Die Doppelelemente und ihre Konstruktion.

Bestimmung einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger.

40. Denken wir uns zwei Punktreihen g und g_1 projektiv aufeinander bezogen. Dann können wir auch den Träger der einen Punktreihe mit dem der andern zusammenfallen lassen. Wir haben also nur noch einen Träger, der gewissermassen doppelt zu nehmen und „projektiv auf sich selbst bezogen" ist. Die Möglichkeit einer solchen Beziehung lässt sich auch direkt leicht erkennen: denn ordnen wir drei Punkten A, B, C eines Trägers g drei andere Punkte A_1, B_1, C_1 des gleichen Trägers zu, so ist dadurch die projektive Beziehung auf der Punktreihe g festgelegt. Um sie nämlich konstruktiv zu verfolgen, projizieren wir A, B, C aus einem beliebigen (nicht auf g gelegenen) Punkt S und A_1, B_1, C_1 aus einem Punkte S_1 je durch einen Strahlenbüschel. Dann ist die projektive

Beziehung dieser beiden Büschel bestimmt und entsprechende Strahlen derselben schneiden entsprechende Punkte auf g aus. Ist ein Punkt auf dem Träger g gegeben, ohne dass hinzugefügt ist, welcher der beiden Punktreihen er angehören soll, so kann man ihn als Punkt der einen oder andern Punktreihe nehmen und demgemäss mit J oder K_1 bezeichnen. Verbindet man ihn dann entweder mit S oder mit S_1, so kann man die beiden entsprechenden Punkte J_1 und K finden, die im allgemeinen nicht zusammenfallen werden. Ganz ebenso können wir auch einen Strahlenbüschel oder einen Ebenenbüschel projektiv auf sich selbst beziehen.

Die Doppelelemente.

41. Bis hierher unterschied sich die projektive Beziehung auf dem gleichen Träger nicht wesentlich von der früher auf verschiedenen Trägern betrachteten. Ein neuer Gesichtspunkt wird erst durch folgende Fragestellung gewonnen: Giebt es auf einem projektiv auf sich selbst bezogenen Träger Elemente, die sich mit den ihnen entsprechenden decken? Giebt es also z. B. bei einer projektiven Beziehung auf einer Geraden einen Punkt X, der mit dem entsprechenden X_1 zusammenfällt? Wir werden einen solchen Punkt einen „Doppelpunkt“ nennen; ihnen entsprechen „Doppelstrahlen“ und „Doppelebenen“ beim Strahlen- bezw. Ebenenbüschel.

Von der Möglichkeit der Existenz solcher „Doppelelemente“ überzeugen wir uns durch folgende Betrachtung. Ein Strahlenbüschel sei projektiv auf sich selbst bezogen, den Strahlen a, b, c u. s. f. entsprechen

die Strahlen a_1, b_1, c_1 u. s. f. Ein beweglich gedachter Strahl durchlaufe den Büschel im Sinne „abc“ (15) nach irgend einem Gesetz, etwa mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Die Bewegung eines zweiten Strahles des gleichen Büschels sei dadurch bestimmt, dass er sich in a_1 befinden soll, wenn der erste Strahl in a ist, in b_1, wenn dieser b passiert u. s. f., dass also die beiden beweglichen Strahlen im gleichen Zeitmoment sich immer in entsprechenden Strahlen der projektiven Beziehung befinden. Dann wird sich der zweite bewegliche Strahl im Sinne $a_1 b_1 c_1$ bewegen. Ist dieser Sinn der gleiche wie abc (Fig. 20a), rotieren

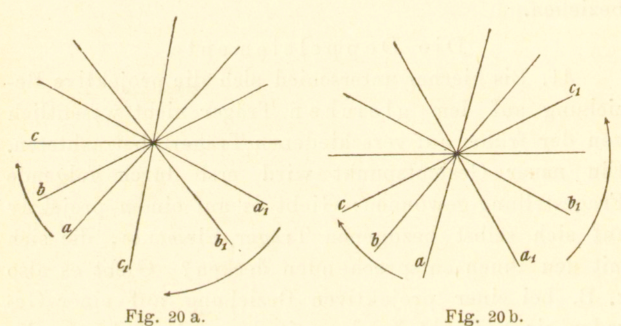


Fig. 20 a. Fig. 20 b.

also beide Strahlen in der gleichen Richtung (etwa wie die Zeiger einer Uhr) so heissen die Büschel „gleichlaufend“. Ist der Sinn abc der entgegengesetzte wie $a_1 b_1 c_1$ (Fig. 20b) so heissen die Büschel „entgegengesetzt laufend“. Stellt man sich im letztern Falle die beiden beweglichen Strahlen vor, so werden sie im Verlauf der Bewegung übereinander wegeilen. Einer solchen Stellung, wo sich für einen Moment die

beiden Strahlen decken, entspricht offenbar ein Doppelstrahl der beiden projektiven Büschel. Ganz die gleichen Ueberlegungen gelten für projektive Punktreihen auf dem gleichen Träger. Bei entgegengesetzt laufenden projektiven Gebilden existieren demnach immer Doppelelemente. Bei gleich laufenden projektiven Beziehungen dagegen kann man dies nicht von vornherein behaupten. Hier können Doppelelemente auftreten oder auch nicht.

In keinem Falle jedoch können mehr als zwei Doppelelemente vorhanden sein. Denn angenommen es gebe in einer projektiven Beziehung auf einer Punktreihe drei Doppelpunkte M, N, P, so wäre für ein Paar entsprechender Punkte A und A_1

$$(M\,N\,P\,A) = (M_1\,N_1\,P_1\,A_1)$$

wobei M_1 mit M, N_1 mit N, P_1 mit P zusammenfällt. Es können aber nicht zwei verschiedene Punkte P und P_1 mit drei Punkten das nämliche Doppelverhältnis bilden, also fällt auch A mit A_1 zusammen und überhaupt je zwei entsprechende Punkte der projektiven Beziehung d. h.

Satz 16: Wenn in einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger drei Elemente mit den ihnen entsprechenden sich decken, so deckt sich überhaupt jedes Element mit dem entsprechenden, d. h. man hat eine Identität".

Demnach können also 0, 1 oder 2 Doppelelemente auftreten. Ihre Bestimmung lässt sich zurückführen auf den Fall der Konstruktion der Doppelpunkte zweier ineinanderliegenden, projektiven Punktreihen. Denn ein projektiv auf sich bezogener Strahlenbüschel wird

von einer Geraden seiner Ebene in zwei projektiven Punktreihen geschnitten, durch deren Doppelpunkte die Doppelstrahlen des Büschels gehen und ein projektiv auf sich bezogener Ebenenbüschel wird von einer beliebigen Ebene in einem projektiv auf sich bezogenen Strahlenbüschel geschnitten, durch dessen Doppelstrahlen auch die Doppelebenen des Ebenenbüschels gehen. Zur Konstruktion der Doppelpunkte zweier projektiven Punktreihen bedienen wir uns eines Kreises, der ein für allemal gezeichnet vorliegen kann, müssen aber zu dem Zweck noch vorher eine Eigenschaft des Kreises kennen lernen.

Hilfssatz über den Kreis.

42. Sind P und P_1 zwei beliebige Punkte auf einem Kreis (Fig. 21) und projizieren wir aus ihnen die übrigen Punkte des Kreises, also den Punkt A durch die Strahlen a und a_1, den Punkt B durch die Strahlen b und b_1 etc., so erhalten wir die Büschel P und P_1 und diese sind projektiv d. h. es gilt der

Satz 17: „Aus irgend zwei beliebigen Punkten eines Kreises werden die übrigen Punkte desselben durch projektive Büschel projiziert“.

In der That ist ja

$$\sphericalangle (ab) = \sphericalangle (a_1 b_1) \text{ oder}$$
$$\sphericalangle (ad) = 180^0 - \sphericalangle (a_1 d_1)$$

In beiden Fällen ist aber

$$\sin (ab) = \sin (a_1 b_1)$$
$$\sin (ad) = \sin (a_1 d_1).$$

Es ist folglich auch

$$(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$$

wenn dies irgend vier Strahlenpaare sind, die aus P und

P_1 Punkte der Kreisperipherie projizieren, also sind die Büschel P und P_1 projektiv.

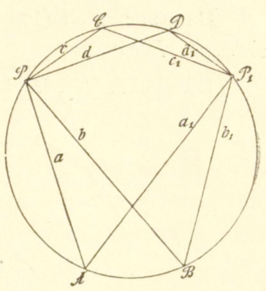


Fig. 21.

Die Steiner'sche Konstruktion der Doppelpunkte.

43. Es liege nun ein Kreis gezeichnet vor und in seiner Ebene befindet sich der Träger g, auf dem eine projektive Beziehung durch die Punktpaare **A**, **A_1**, **B**, **B_1**, **C**, **C_1** gegeben ist (Fig. 22). Um nun über das Vorhandensein von Doppelpunkten einen sicheren Aufschluss zu gewinnen, wählen wir zunächst auf dem Kreise beliebig einen Punkt S und ziehen die Linien S**A**, S**B**, SC, S**A_1**, S**B_1**, SC_1, welche den Kreis zum zweitenmal in A, B, C, A_1, B_1, C_1 schneiden mögen. Wir haben dann die beiden gegebenen Punktreihen „auf den Kreis projiziert."

Bezeichnen wir ferner die eben genannten sechs Strahlen der Reihe nach mit a, b, c, a_1, b_1, c_1, so haben wir in S projektive Büschel, also

(1) Büschel (a, b, c ....) $\barwedge$ Büschel (a_1, b_1, c_1 ....)

Projizieren wir nun die Punkte A, B, C u. s. f. aus A_1, sowie die Punkte A_1, B_1, C_1 u. s. f. aus A je durch einen Strahlenbüschel, so ergeben sich nach dem soeben bewiesenen Hilfs-Satz folgende Projektivitäten:

(2) Büschel A (A_1, B_1, C_1 ....) $\barwedge$ Büschel S (a_1, b_1, c_1 ....)

(3) Büschel A_1 (A, B, C ....) $\barwedge$ Büschel S (a, b, c....) *)

*) Die Bezeichnung ist leicht verständlich: Büschel A (A_1, B_1, C_1 ....) bedeutet den Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt A, dessen Strahlen nach A_1, B_1, C_1 . . . laufen.

Da aber nach (1) auch die Büschel rechts projektiv sind, so folgt

4) Büschel $A(A_1, B_1, C_1 \ldots) \overline{\wedge}$ Büschel $A_1(A, B, C \ldots)$

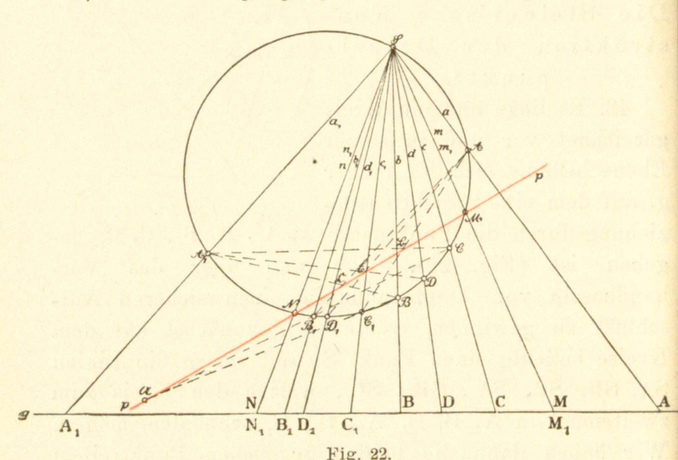


Fig. 22.

Diese Büschel sind aber nicht bloss projektiv, sondern auch perspektiv, nach Satz 13), da in der Verbindungslinie AA_1 der Büschelmittelpunkt entsprechende Strahlen der beiden Büschel vereinigt sind; folglich liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden p.

Schneiden sich nun AB_1 und A_1B in ℭ, ferner AC_1 und A_1C in 𝔅, so ist die Verbindungslinie 𝔅ℭ die Achse p der Perspektivität.

Ist jetzt also 𝔈 ein beliebiger Punkt auf p, so liefern A𝔈 und A_1𝔈 die zweiten Schnittpunkte D_1 und D mit dem Kreise und D und D_1 geben aus S

auf g projiziert zwei entsprechende Punkte **D** und $\mathbf{D}_1$ der projektiven Punktreihen.

Nun möge die Achse p den Kreis in **M** und **N** schneiden. Führt man dann für diese Punkte von p die gleiche Betrachtung durch wie gerade für den beliebigen Punkt 𝔈, so ergibt sich aus der Figur, dass M und N aus S auf g projiziert die Doppelpunkte **M** und **N** der projektiven Punktreihen liefern.

Schneidet p den Kreis nicht, so gibt es keine Doppelpunkte; würde p den Kreis berühren, so gäbe es nur einen Doppelpunkt. —

<u>**Zusatz.**</u> Statt der Punkte A und A_1 hätte man ebensogut auch B und B_1 oder C und C_1 u. s. f. als Mittelpunkte der perspektiven Büschel wählen können. Die Punkte M und N, also auch die Gerade p müssen sich dadurch ebenso ergeben. Es muss demnach auch der Schnittpunkt 𝔄 von BC_1 und B_1C, der Schnittpunkt 𝔉 von BD_1 und B_1D u. s. f. auf p liegen. Die Achse p enthält demnach alle Schnittpunkte wie:

$$\left.\begin{matrix} A\,B_1 \\ A_1B \end{matrix}\right\}\mathfrak{C} \qquad \left.\begin{matrix} A\,C_1 \\ A_1C \end{matrix}\right\}\mathfrak{B} \qquad \left.\begin{matrix} A\,D_1 \\ A_1D \end{matrix}\right\}\mathfrak{E}$$

$$\left.\begin{matrix} B\,C_1 \\ B_1C \end{matrix}\right\}\mathfrak{A} \qquad \left.\begin{matrix} B\,D_1 \\ B_1D \end{matrix}\right\}\mathfrak{F} \qquad \left.\begin{matrix} C\,D_1 \\ C_1D \end{matrix}\right\}\mathfrak{G} \text{ u. s. f.}$$

Diese Konstruktion der Doppelelemente ersann der deutsche Geometer Steiner. [Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin 1833].

Ein weiterer Satz über die Doppelelemente.

44. Sind M, N die Doppelpunkte, **A**, $\mathbf{A}_1$, **B**, $\mathbf{B}_1$ zwei

Paare entsprechender Punkte zweier projektiven Punktreihen, so hat man

$$(MNAB) = (M_1 N_1 A_1 B_1).$$

Führt man die Ausdrücke für die Doppelverhältnisse ein, so ergibt eine leichte Umformung die andere Relation:

$$(MNAA_1) = (MNBB_1)$$

Der Wert dieses Doppelverhältnisses muss also für alle Paare entsprechender Punkte der gleiche sein, etwa $= k =$ const., daher der

Satz 18: „Je zwei entsprechende Elemente einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger bilden mit den beiden Doppelelementen ein konstantes Doppelverhältnis."

Bestimmung der Doppelelemente durch die Rechnung.

45. Bemerken wir noch kurz, wie die Rechnung die Doppelelemente liefert. Wird eine und dieselbe Gerade als X- und X_1-Achse genommen, so ist eine projektive Beziehung auf derselben nach 37) gegeben durch eine Gleichung

$$\alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = o$$

Ein Doppelpunkt hat die Eigenschaft, dass für ihn $x = x_1$, vorausgesetzt, dass wir die x und x_1 vom gleichen Anfangspunkt aus und in derselben Richtung positiv rechnen. Setzen wir also in der Relation $x = x_1$, so kommt die quadratische Gleichung

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)\, x + \delta = o$$

deren beide Wurzeln die Abscissen der Doppelpunkte liefern. Sind die Wurzeln der Gleichung imaginär,

so gibt es keine Doppelpunkte: wir sagen: die Doppelpunkte sind imaginär.

Alle Aufgaben, deren Lösung schliesslich auf eine Gleichung 2. Grades führt, bezeichnen wir als Aufgaben 2. Grades. Ihre geometrische Erledigung finden diese immer durch die soeben bewiesene Steiner'sche Konstruktion, bei der ein Kreis und ausserdem das Lineal zu benutzen ist. Führt eine Aufgabe analytisch zu einer linearen Gleichung, also zu einer Gleichung 1. Grades, so wird sie als Aufgabe 1. Grades bezeichnet. Konstruktiv muss sie sich dann behandeln lassen lediglich unter Benützung des Lineals. Es kommen also dann bloss die Operationen vor: den Schnittpunkt zweier Geraden zu zeichnen und durch zwei Punkte eine Gerade zu legen. Bei der Steiner'schen Konstruktion dagegen hatte man die Schnittpunkte einer Geraden (p) mit einem Kreis zu zeichnen.

Aufg. 15. Eine Gerade g soll projektiv so auf sich bezogen werden, dass den zwei gegebenen Punkten A und B zwei andere A_1 und B_1 entsprechen und dass der weiter gegebene Punkt M einer der Doppelpunkte der projektiven Beziehung wird.

1. Lösung. Bezeichnet man M auch noch als M_1, so hat man drei Paare entsprechender Punkte und könnte unter Zuhilfenahme eines Kreises nach 43) den noch fehlenden Doppelpunkt finden. Man führe die Konstruktion wirklich durch.

2. Lösung. Ist von den beiden Doppelelementen eines gegeben, so hängt die Aufgabe, das fehlende zu bestimmen, nur noch von einer linearen Gleichung

ab; sie ist also eine Aufgabe 1. Grades und muss sich folglich auch ohne Benutzung eines Kreises, lediglich mit dem Lineal lösen lassen. In der That ziehen wir durch M irgend eine Gerade und wählen auf ihr die Punkte S und S_1 willkürlich. Aus S projizieren wir die Punkte A, B, M, aus S_1 die Punkte A_1, B_1, M_1. Dann sind diese beiden Büschel projektiv, sofern entsprechende Strahlen derselben je entsprechende Punkte der Punktreihen projizieren; die Büschel sind aber überdies wieder perspektiv, weil im Verbindungs-Strahl SS_1 entsprechende Strahlen vereinigt sind. Sie liefern eine Perspektivitäts-Achse p, die bestimmt ist durch die Punkte **A** und **B**, wobei der erstere der Schnittpunkt von SA und S_1A_1, während in **B** sich SB und S_1B_1 begegnen. Der Schnittpunkt von p mit g ist dann aber der zweite Doppelpunkt N der projektiven Beziehung.

Aufg. 16. Von einer projektiven Beziehung auf einer Geraden sind gegeben ein Paar entsprechender Punkte A, A_1, sowie die beiden Doppelpunkte M und N. Weitere entsprechende Punkte zu konstruieren.

Aufg. 17. In einem Strahlenbüschel sind gegeben die Strahlenpaare a, a_1, b, b_1 und der Strahl m. Man beziehe den Büschel projektiv so auf sich, dass m ein Doppelstrahl und a, a_1 und b, b_1 zwei Paare entsprechender Strahlen.

Lösung. Ziehe durch einen Punkt von m zwei Gerade g und g_1 und bringe sie bezüglich zum Schnitt mit den Büscheln.

Aufg. 18. Von einer projektiven Beziehung eines Strahlenbüschels sind gegeben ein Paar entsprechender Strahlen a, a_1, sowie die beiden Doppelstrahlen m und n. Weitere entsprechende Strahlen zu konstruieren.

Aufg. 19. Gegeben sind drei Gerade g_1, g_2, g_3 und drei Punkte P_1, P_2, P_3; man zeichne ein Dreieck A_1, A_2, A_3, dessen Ecken in dieser Reihenfolge bezüglich auf den drei Geraden liegen und dessen Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ bezw. durch die Punkte P_1, P_2, P_3 hindurchgehen.

Lösung: Wählen wir auf g_1 einen Punkt A_1 ganz beliebig, ziehen wir die Verbindungslinie $A_1 P_1$, welche g_2 in A_2 treffen möge. Die Verbindungslinie $A_2 P_2$ schneide g_3 in A_3 und die Verbindungslinie $A_3 P_3$ endlich liefere auf g_1 einen Schnittpunkt A_1'. Lassen wir A_1 die Punktreihe g_1 durchlaufen, so beschreibt der Punkt A_1' eine dazu projektive Punktreihe. Wir bestimmen diese projektive Beziehung, indem wir zu drei Lagen des einen Punktes die entsprechenden des andern zeichnen. Sind dann die Doppelpunkte dieser projektiven Punktreihe reell vorhanden, so liefert jeder derselben ein Dreieck von der verlangten Eigenschaft. Verallgemeinerung für n Ecke!

§ 17. Die involutorische Beziehung.

Herleitung der involutorischen Beziehung.

46. Betrachten wir noch einen speziellen, aber besonders wichtigen Fall der projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger. Nehmen wir eine projektiv auf sich

bezogene Punktreihe, so wird einem beliebigen Punkte A ein Punkt A_1 entsprechen. Bezeichnen wir den gleichen Punkt A mit B_1, indem wir ihn als einen Punkt der andern Punktreihe auffassen, so wird ihm ein Punkt B zugewiesen sein, der von A_1 verschieden ist. Es frägt sich nun: Kann B mit A_1 zusammenfallen und kann dies noch für weitere Punkte einer projektiven Beziehung eintreten? Darauf gibt Antwort folgender

Satz 19: „Wenn in einer projektiven Beziehung auf einer Punktreihe einmal die beiden einem Punkte entsprechenden Punkte zusammenfallen, so fallen sie für jeden Punkt zusammen.“

Wählen wir, um dies nachzuweisen, A und A_1 sowie C und C_1 ganz beliebig (Fig. 23), B_1 ferner falle mit A und B mit A_1 zusammen, dann ist durch die drei Paare A, B, C, A_1, B_1, C_1 sicher eine projektive Beziehung bestimmt. Bezeichnen wir jetzt den Punkt C mit

$\mathcal{A}$ $\mathcal{C}$ $\mathcal{B}$ $\mathcal{D}$
$\mathcal{B}_1$ $\mathcal{D}_1$ $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{C}_1$

Fig. 23.

D_1, so entspricht ihm ein Punkt D derart, dass

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$$
$$= (BAC_1C) \text{ oder nach 23)}$$
$$= (ABCC_1)$$

Daraus folgt aber dann, dass D mit C_1 zusammenfällt. Ganz in der gleichen Weise zeigt man, dass einem beliebigen Punkte E, F_1 ein Punkt E_1, F entspricht. Es ist also nicht nötig, die beiden Punktreihen in der Bezeichnung zu unterscheiden, jedem Punkte des Trägers ist ein bestimmter Punkt zuge-

wiesen. Es zerfällt der ganze Träger in Punktpaare und wir wollen die Punkte eines Paares als entsprechende oder zugeordnete Punkte bezeichnen. Die analogen Betrachtungen gelten für den Strahlen- und Ebenen-Büschel. Wir nennen eine solche projektive Beziehung, in der jedem Element ein anderes doppelt entspricht, eine „involutorische“ oder auch eine „Involution“ von Punkten bezw. Strahlen oder Ebenen. Bezeichnen wir in Fig. 23 den Punkt A, B_1 mit **A**, den Punkt A_1, B mit **A′**, C und C_1 mit **B** und **B′**, so zeigt die eben durchgeführte Betrachtung, dass die Involution auf der Geraden durch die beiden Paare von zugeordneten Punkten **A**,**A′** und **B**,**B′** gerade bestimmt ist oder allgemein

Satz 20: „Eine Involution ist durch zwei Paare von zugeordneten Elementen bestimmt.“

Die Doppelelemente einer Involution.

47. Die Doppelelemente der projektiven Beziehung finden wir natürlich auch wieder bei der Involution. Jedes Doppelelement stellt ein Paar von Elementen vor, die einander unendlich nahe gerückt sind. Sind die Doppelelemente vorhanden, so heisst die Involution wohl auch eine „hyperbolische“, bei nicht vorhandenen Doppelelementen dagegen eine „elliptische“ und endlich eine „parabolische“, wenn die Doppelelemente sich in ein Element vereinigt haben.

Sind M, N die Doppelpunkte einer Punktinvolution, während A,A′, B,B′ u. s. f. Paare von zugeordneten Punkten, so folgt aus Satz 18, der hier ja auch gilt:

$$(MNAA') = (MNA'A) = \text{const.} = k.$$

Es ist aber nach 23) Gl. (3)

$$(MNA'A) = \frac{1}{(MNAA')}, \text{ also}$$

$$(MNAA')^2 = 1.$$

Als Wert des Doppelverhältnisses (MNAA') ergibt sich daraus — 1, da der Wert + 1 nicht zulässig (27); es ist also k = — 1 und A und A' liegen harmonisch zu M und N, ebenso B und B' u. s. f. Daraus folgt in leicht zu übersehender Schlussweise

Satz 21: „Eine Involution besteht aus all den Paaren von Elementen, welche die zwei Doppelelemente, (die reell oder imaginär sein können) harmonisch trennen."

§ 18. Die Punkt-Involution.

Die verschiedenen Typen.

48. Hat man eine Punktinvolution auf einer Geraden, so kann man auch zum unendlich fernen Punkt O' ihres Trägers den entsprechenden O sich verschaffen. Dieser Punkt O heisst der Mittelpunkt der Involution. Weitere Paare entsprechender Punkte seien A,A', B,B' u. s. f. Dann gilt die Relation:

$$(ABOO') = (A'B'O'O)$$

da ja die involutorische Beziehung nur ein spezieller Fall der projektiven. Rechnet man die Ausdrücke aus und beachtet, dass O' im Unendlichen liegt, so ergibt sich

$$AO . A'O = BO . B'O.$$

Demnach muss dies Produkt, gebildet für irgend zwei entsprechende Punkte, immer den gleichen Wert haben. Bezeichnen wir denselben mit c, so sind folgende Fälle möglich:

1) c *positiv*, also etwa $c = d^2$. Dann müssen die Strecken AO und A′O, BO und B′O u. s. f. stets gleichgerichtet sein, da ihr Produkt positiv.*) Es liegen also entsprechende Punkte A,A′ u. s. f. immer auf der *gleichen* Seite von O, also beide rechts oder beide links vom Mittelpunkt O (Fig. 24[a]). In der Entfernung d vom Mittelpunkt liegen rechts und links die Doppelpunkte dieser hyperbolischen Involution.

2) c *negativ*, also etwa $c = -d^2$. Dann müssen entsprechende Punkte wie A,A′ u. s. f. stets auf verschiedenen Seiten von O liegen, der eine rechts, der andere links vom Mittelpunkt (Fig. 24[b]). Die Involution besitzt keine Doppelpunkte, ist elliptisch.

3) $c = o$ liefert den Uebergangsfall. Soll das Produkt AO. A′O stets Null sein, so muss von den zwei Punkten A,A′ etc. stets einer nach O fallen. Jedem Punkte des Trägers entspricht also immer der Mittelpunkt O und in diesen rücken gleichzeitig die beiden Doppelpunkte. Dies ist eine parabolische Involution.

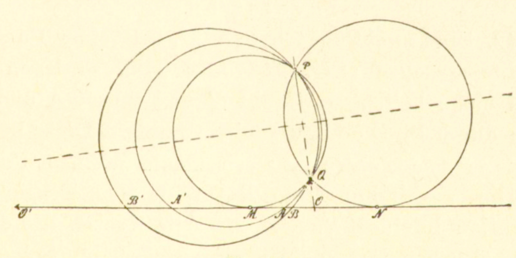


Fig. 24 a.

*) Wir wählen auf dem Träger der Involution eine Richtung als die positive.

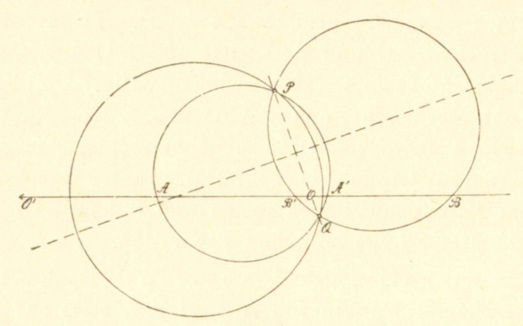


Fig. 24 b.

Aus 1) und 2) ergibt sich noch die Regel: Wenn die von entsprechenden Punkten einer Involution begrenzten Strecken AA′, BB′ .... übereinander greifen, so existieren keine Doppelpunkte (Fig. 24^b); wenn aber eines der Paare A,A′ und B,B′ ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern liegt, so sind reelle Doppelpunkte vorhanden (Fig. 24^a).

Geometrische Erzeugung einer Punkt-Involution.

49. Sind zwei Punktpaare A,A′, B,B′ einer Punktinvolution gegeben (Fig. 24^a oder 24^b), so legen wir durch einen beliebigen Punkt P und durch A und A′, sowie durch P, B und B′ je einen Kreis. Diese beiden Kreise schneiden sich zum zweitenmale in einem Punkte Q. Die Verbindungslinie PQ trifft den Träger der Involution in einem Punkte O. Alle Kreise, die durch P und Q gehen, bilden einen „Kreisbüschel“. Schneidet irgend einer dieser Kreise den Träger in den Punkten C und C′, so ergibt sich nach planimetrischen Sätzen

$$OP \cdot OQ = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'$$

Also bilden die Punktpaare, in denen der Kreisbüschel den Träger g schneidet, die gegebene Punkt-Involution. O ist der Mittelpunkt derselben. Trennen, sich die Punktpaare A,A′, B,B′ nicht wie in Fig. 24[a] so gibt es in dem Büschel auch zwei Kreise, welche den Träger berühren. Die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte M,N der Involution. In der Fig. 24[b], wo die Punktpaare A,A′, B,B′ sich trennen, existieren keine Doppelpunkte. Umgekehrt wird jeder Kreisbüschel von irgend einer Geraden seiner Ebene in einer Punktinvolution geschnitten, die jedem der drei genannten Typen angehören kann. Legt man die Gerade durch P oder Q, so erhält man auf ihr als Schnitt mit dem Kreisbüschel eine parabolische Involution.

V. Abschnitt.

Die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe.

§ 19. Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Strahlenbüschel.

Die Erzeugung neuer Gebilde.

50. Im Bisherigen haben wir uns damit beschäftigt, die einförmigen Grundgebilde projektiv aufeinander oder auf sich selbst zu beziehen und die Eigenschaften solcher Beziehungen zu untersuchen. Dies ist aber nicht unser Endzweck; vielmehr wollen wir jetzt projektive Grundgebilde erster Stufe dazu benutzen, um aus ihnen neue geometrische Gebilde abzuleiten. In zwei projektiven Grundgebilden sind ja die Elemente einzeln einander zugeordnet. Wenn nun zwei solche einander

entsprechende Elemente vermöge der Operationen des Projizierens oder Schneidens ein neues Element festlegen, so bestimmen die beiden projektiven Grundgebilde — vorausgesetzt, dass man alle die unendlich vielen entsprechenden Elemente zusammen nimmt — eine unendliche Anzahl neuer Elemente, also ein neues, geometrisches Gebilde, das wir als „Erzeugnis“ der projektiven Grundgebilde bezeichnen.

Hat man z. B. zwei projektive Strahlenbüschel, die in einer Ebene gelegen sind, so kann man jeden Strahl des einen Büschels mit dem ihm entsprechenden des andern Büschels zum Schnitt bringen und man erhält so zunächst lauter einzelne Punkte, die aber um so mehr einen ununterbrochenen Linienzug, also eine „Kurve“ bilden werden, je mehr man die Strahlen in den Büscheln verdichtet.

Zwei beliebig im Raume gelegene, projektive Strahlenbüschel dagegen würden zunächst kein neues Gebilde „erzeugen“, weil zwei im Raum gelegene Gerade kein neues Element festlegen.

Hat man aber zwei projektive Punktreihen, so kann man jeden Punkt mit seinem entsprechenden durch eine Gerade verbinden und erhält so als Erzeugnis ein System von unendlich vielen Geraden. Dies ist möglich, gleichgiltig, ob die Punktreihen in einer Ebene liegen oder beliebig im Raume. Das Erzeugnis ist freilich in beiden Fällen ein ganz verschiedenes. Denn im ersten Falle liegen alle erzeugten Geraden in der gleichen Ebene, im zweiten sind sie im Raume angeordnet. Auf diese Weise kann man neue geometrische Gebilde erzeugen und dies sind ge-

rade die einfachsten und wichtigsten der Geometrie und die nämlichen, zu denen man auch durch die andern mathematischen Untersuchungsmethoden geführt wird. Wir betrachten zunächst das Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel in der gleichen Ebene. Dies ist, wie bereits erwähnt, eine Kurve. Daher müssen wir einige, auf diesen Gegenstand sich beziehende Bemerkungen vorausschicken.

Ordnung und Klasse einer Kurve.

51. Unter einer „ebenen Kurve“ oder kurz einer „Kurve“ wollen wir einen ununterbrochenen Linienzug verstehen, dessen einzelne, alle in einer Ebene befindliche, Punkte sich nach einem mathematischen Gesetze bestimmen.*) In der rechnenden (analytischen) Geometrie teilt man die Kurven ein nach der Natur der Gleichung, durch welche sie, etwa in rechtwinkligen Koordinaten x, y, dargestellt werden. Diese Gleichung kann durch eine „transcendente“ Funktion der Variabeln gegeben werden — „transcendente Kurven“ oder durch eine „algebraische“ Funktion — „algebraische“ Kurven. Die Aufgabe, die Schnittpunkte einer beliebigen Gerade mit einer Kurve zu bestimmen, führt dann auf eine Gleichung, deren Wurzeln, sofern sie reell sind, die geometrisch in die Erscheinung tretenden Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve liefern, allenfallsigen imaginären Wurzeln dagegen entsprechen keine geometrisch sichtbaren Schnittpunkte. Ist die Kurvengleichung transcendent, so erhält man auf

*) Auf die genaueren, zum Teil schwierigen Definitionen, wie sie nur die Analysis zu liefern imstande ist, können wir hier nicht eingehen.

einer beliebigen Geraden im Allgemeinen unendlich viele Schnittpunkte mit der Kurve, da auch die Gleichung für die Schnittpunkte dann transcendent sein wird. Liegt eine algebraische Kurvengleichung vor vom Grade n, (bei der also die Summe der Exponenten von x und y in jedem Term n nicht übersteigt,) so ist auch die Gleichung zur Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden algebraisch und vom n. Grad. Diese Zahl n nennen wir die „Ordnung" der Kurve ohne Rücksicht darauf, ob die Wurzeln der letzteren Gleichung reell oder (paarweise) complex sind. Natürlich kann dann auch die Zahl der reellen Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit einer solchen Kurve n. Ordnung nie grösser, sondern höchstens = n sein. Doch braucht die Zahl von n reellen Schnittpunkten mit einer Geraden nicht erreicht zu werden. Es kann vielmehr vorkommen, dass eine beliebige Gerade immer nur n—2 oder n—4 u. s. f. reelle Schnittpunkte mit der Kurve n. Ordnung liefert.

Um zu dem Begriff der Tangente einer Kurve zu gelangen, sei P ein Punkt einer Kurve, P_1 ein anderer Punkt derselben. Der Punkt P_1 rückt auf der Kurve gegen P hin. Dann kann man immer die Verbindungslinie PP_1 zeichnen. Je mehr sich nun P_1 dem Punkte P nähert, um so mehr nimmt die Verbindungslinie PP_1 eine bestimmte Grenzlage, die der Tangente in P, an, die erreicht wird, wenn P_1 mit P zusammenfällt. Dies beweist die Differentialrechnung. Eine Kurve bestimmt also auch eine unendliche Anzahl von geraden Linien, ihre Tangenten. Jede Tangente berührt im „Berührungspunkt" die Kurve.

Ist umgekehrt eine Reihe von unendlich vielen Geraden gegeben, die ununterbrochen (stetig) aufeinander folgen, so ist auch dadurch eine Kurve bestimmt, die von diesen Geraden als Tangenten „umhüllt" wird

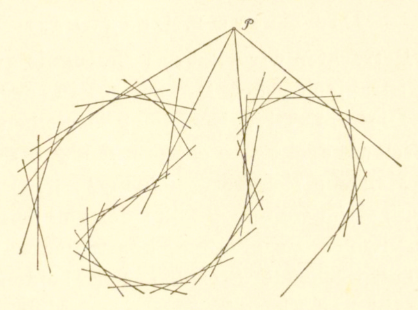


Fig. 25.

(Fig. 25). Halten wir eine der Geraden, etwa t fest, und wählen eine zweite, etwa t_1, näher und näher an t, so nähert sich der Schnittpunkt von t und t_1 mehr und mehr einem bestimmten Punkt auf t, den er erreicht, wenn t_1 mit t zusammenfällt. Dieser Punkt ist der Berührungspunkt T von t mit der umhüllten Kurve. Von den durch T an die Kurve gehenden Tangenten haben sich also zwei in der Tangente t vereinigt.

Die Aufgabe, die Tangenten einer algebraischen Kurve zu bestimmen, die durch einen beliebigen Punkt in der Ebene der Kurve gehen, führt rechnerisch auf eine gewisse Gleichung. Den Grad dieser Gleichung bezeichnet man als die „Klasse" der Kurve und zwar in rein analytischem Sinne, also ohne Rücksicht auf die Realität. Diese Zahl ist dann auch wieder eine

obere Grenze für die Anzahl der reellen Tangenten, die durch einen Punkt an eine Kurve gehen können. An eine Kurve ν. Klasse können also auch von keinem Punkte aus mehr als ν reelle Tangenten gezogen werden.

Die Kurve 2. Ordnung.

52. Betrachten wir jetzt das Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel S und S_1 in der gleichen Ebene. Die projektive Beziehung derselben sei festgelegt durch die drei Paare entsprechender Strahlen a, a_1; b, b_1; c, c_1, welche sich bezüglich in A, B, C schneiden (Fig. 26).*) Um weitere Punkte der von den Büscheln erzeugten Kurve zu erhalten, konstruieren wir noch weitere entsprechende Strahlen der beiden Büschel nach der in 32) Fig. 17 gegebenen Methode. Wir

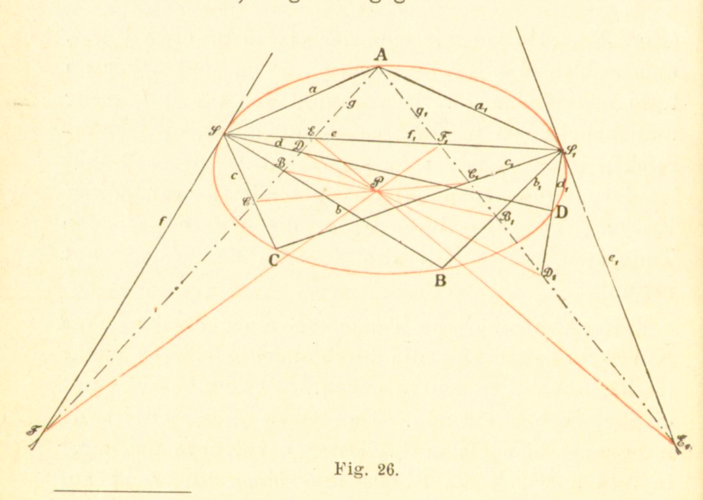


Fig. 26.

*) Man lege sich, wie immer, die Figur selbst an.

wählen zwei Gerade g und g_1 beliebig durch A, bringen g mit a, b, c in A, B, C, g_1 mit a_1, b_1, c_1 in A_1, B_1, C_1 zum Schnitt; dann liefern BB_1 und CC_1 in ihrem Schnittpunkt das Centrum P der Perspektivität für die Punktreihen auf g und g_1.

Zu einem beliebigen Strahl d des Büschels S fin den wir dann den entsprechenden d_1 im Büschel S_1 gemäss der Vorschrift, dass der Schnittpunkt D von d und g mit dem Schnittpunkt D_1 von d_1 und g_1 auf einer Geraden durch P liegen muss. Die Strahlen d und d_1 schneiden sich dann in einem weitern Punkt D der erzeugten Kurve, die wir kurz mit k^2 bezeichnen wollen und von der wir auf diese Weise beliebig viel Punkte zeichnen können.

Wir behaupten nun, dass auch die Büschelmittelpunkte S und S_1 auf der k^2 liegen. Denn betrachten wir den Verbindungsstrahl SS_1 als einen Strahl des Büschels S, weswegen er mit e bezeichnet werden möge, so entspricht ihm der in der Figur gezeichnete Strahl e_1 und es erscheint S_1 als Schnitt der entsprechenden Strahlen e und e_1, also liegt S_1 auf der erzeugten Kurve. Ebenso kann SS_1 aber auch als Strahl des Büschels S_1, also als ein Strahl f_1 betrachtet werden, wonach ihm dann der in der Figur konstruierte Strahl f entspricht. S ist jetzt Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen f und f_1, also ebenfalls ein Punkt von k^2.

Die Kurve k^2 ist ferner von der 2. Ordnung d. h. eine beliebige Gerade l schneidet sie im Allgemeinen in zwei Punkten. Um dies zu beweisen, konstruieren wir in einer *eigenen*, *neuen* Figur die Schnittpunkte A, B, C von l mit den Strahlen a, b, c und

die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 von l mit a_1, b_1, c_1. Denken wir uns die beiden projektiven Büschel S und S_1 mit l geschnitten, so sind die auf l entstehenden Punktreihen A, B, C ... und A_1, B_1, C_1 ... ebenfalls projektiv. Ist M ein Doppelpunkt dieser beiden Punktreihen, so schneiden sich in ihm entsprechende Strahlen SM und S_1M der beiden Büschel, also liegt ein solcher Doppelpunkt auf der k^2. Andererseits muss ein Schnittpunkt von l mit k^2 notwendig einen Doppelpunkt der projektiven Punktreihen liefern. Folglich liegen auf der Geraden l soviel Schnittpunkte mit der Kurve k^2 als Doppelpunkte der beiden projektiven Punktreihen vorhanden sind d. h. zwei, die natürlich reell oder nicht vorhanden (imaginär) oder in einem vereinigt sein können. Die Kurve k^2 ist also von der 2. Ordnung. Wir nennen sie wol auch eine „Punktreihe 2. Ordnung". Die wirkliche Durchführung der Konstruktion der Schnittpunkte auf l folgt später als Aufgabe 20).

Kehren wir nun wieder zu der Figur 26 zurück. Jede durch S gehende Gerade wie z. B. d hat also mit der k^2 ausser S noch einen Punkt gemein und zwar ist dies der Punkt D, wo d von dem entsprechenden Strahl d_1 getroffen wird. Betrachten wir nun aber den Strahl f, so wird dieser Strahl von dem entsprechenden Strahl f_1 wieder in S getroffen: es fallen mithin für den Strahl f die beiden Schnittpunkte mit der k^2 nach S, also ist f die Tangente in S an die Kurve k^2. Ebenso folgert man, dass der Strahl e_1 die Kurve k^2 in S_1 berührt.

Zusammenfassend gelangen wir zu folgendem

Satz 22: „Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene befindlicher Strahlenbüschel ist eine Kurve 2. Ordnung, welche auch durch die Büschel-Mittelpunkte hindurchgeht und in diesen diejenigen Strahlen zu Tangenten hat, welche dem Verbindungsstrahl der Mittelpunkte bezüglich entsprechen“.

Weitere Sätze über die Kurve 2. Ordnung.

53. Die Punkte S und S_1 nahmen bis jetzt eine ausgezeichnete Stellung ein gegenüber den andern Punkten der k^2. Trotzdem spielen sie auf dieser Kurve gar keine besondere Rolle, vielmehr können, wie wir jetzt zeigen wollen, irgend zwei beliebige Punkte von k^2 als Mittelpunkte projektiver Büschel genommen werden, welche die Kurve k^2 erzeugen.

Es seien wieder (Fig. 27) die beiden projektiven Strahlenbüschel S und S_1 gegeben durch die Strahlenpaare a,a_1, b,b_1, c,c_1, welche die Punkte **A**, **B**, **C** liefern, ferner seien durch **A** die Hilfsgeraden g und g_1 gezeichnet und das Centrum P der perspektiven Punktreihen auf g und g_1 konstruiert. Wenn wir dann SP ziehen, so ist der Schnittpunkt **T** von SP mit g_1 ein Punkt der erzeugten Kurve k^2 und ebenso der Punkt **R**, in welchem g von S_1P getroffen wird. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergibt sich direkt durch die Bemerkung, dass S**T** und S_1**T**, ebenso S**R** und S_1**R** gemäss unserer Konstruktion entsprechende Strahlen t, t_1 bezw. r, r_1 sind. — Man erhält dann die nämliche projektive Beziehung der Büschel S und S_1, also auch die gleiche Kurve k^2, wenn man statt von den

Strahlenpaaren a, a_1, b, b_1, c, c_1 ausgeht von den drei Strahlenpaaren b, b_1, r, r_1, t, t_1.

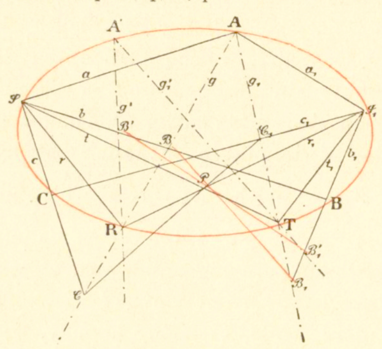


Fig. 27.

Wir denken uns nun, wir hätten die Kurve k^2, ausgehend von den projektiven Büscheln S und S_1, konstruiert. Darauf greifen wir auf ihr drei Punkte beliebig heraus, die wir **B**, **T**, **R** nennen, während die nach ihnen laufenden Strahlen der Büschel S und S_1 bezw. b, b_1, t, t_1. r, r_1 heissen mögen, und stellen uns jetzt die Aufgabe, die Figur 27 zu rekonstruieren, also zwei Gerade g und g_1 zu finden, welche die Konstruktion der projektiven Beziehung vermitteln.

Ziehen wir **ST** und S_1**R**, so liefert ihr Schnittpunkt einen Punkt P. Durch P wollen wir jetzt irgend eine Gerade ziehen, welche die Strahlen b und b_1 bezüglich in B′ und B_1' trifft. Wir zeichnen den Schnittpunkt **A′** von **RB′** und TB_1'. Bezeichnen wir die Geraden **RA′** und **TA′** bezw. mit g′ und g_1', so können wir unter Benutzung von P als Perspektivitäts-Centrum die Büschel S und S_1 jetzt projektiv auf-

einander beziehen und diese projektive Beziehung muss notwendig die gleiche sein, wie die ursprünglich gegebene, da sie in drei Paaren entsprechender Strahlen b, b_1, t, t_1, r, r_1 mit ihr übereinstimmt. Dann schneiden sich aber in A′ entsprechende Strahlen der gegebenen projektiven Büschel d. h. A′ liegt auch auf der Kurve k^2.

Nun war aber die Gerade durch P, welche B′ und B_1' auf b und b_1 ausschnitt, noch ganz beliebig. Lassen wir sie den Büschel P durchlaufen, so beschreiben B′ und B_1' auf b und b_1 zu einander perspektive Punktreihen. Die Strahlen RB′ und TB_1', welche diese Punktreihen je aus R und T projizieren, werden also projektive Strahlenbüschel durchlaufen und entsprechende Strahlen dieser Büschel schneiden sich immer in Punkten A′ der Kurve k^2. Folglich werden die Punkte A′ aus R und T durch projektive Büschel projiziert.

Die Rechnung zeigt nun ferner, dass die durch projektive Strahlenbüschel erzeugte Kurve die allgemeinste Kurve 2. Ordnung ist. Wir haben also den

Satz 23: „Die Punkte einer Kurve 2. Ordnung werden aus zweien beliebigen ihrer Punkte durch projektive Strahlenbüschel projiziert.“

Zusatz 1. Da wir in den Büschelmittelpunkten S und S_1 nach 52) die Tangenten an die Kurve 2. Ordnung konstruieren konnten, so ist es uns jetzt auch möglich, in einem beliebigen Punkt der Kurve die Tangente zu zeichnen, in dem wir den Mittelpunkt des einen erzeugenden Büschels in diesen Punkt verlegen.

Zusatz 2. Der Kreis ist auch eine Kurve 2. Ordnung und besitzt die in Satz 23) zum Ausdruck gebrachte Eigenschaft (42), die wir übrigens bei der Steiner'schen Construktion bereits benutzten (43). Da aber diese Konstruktion bloss diese Eigenschaft voraussetzte, so könnten wir dazu statt des Kreises auch eine beliebige Kurve 2. Ordnung benützen.

Bestimmung einer Kurve 2. Ordnung.

54. Aus der Erzeugung der Kurve 2. Ordnung durch projektive Büschel, folgt auch leicht, dass es eine und nur eine solche Kurve gibt, welche fünf beliebig in einer Ebene gelegene Punkte 1, 2, 3, 4, 5 enthält. Denn wählen wir z. B. die Punkte 1 und 2 als Büschel-Mittelpunkte, so müssen den Strahlen 13, 14, 15 der Reihe nach entsprechen die Strahlen 23, 24, 25, wodurch die projektive Beziehung der Büschel gerade festgelegt ist. Die Büschel 1 und 2 erzeugen dann die durch die fünf Punkte gehende Kurve 2. Ordnung. Es kann keine zweite solche Kurve geben. Denn auch eine solche zweite Kurve würde aus 1 und 2 durch projektive Büschel projiziert und diese projektive Beziehung muss mit der eben bestimmten notwendig zusammenfallen, da sie drei Paare entsprechender Strahlen mit ihr gemein hat. Also folgt:

Satz 24: „Durch fünf beliebige Punkte einer Ebene geht eine und stets eine Kurve 2. Ordnung.“

Würden von den fünf gegebenen Punkten drei, etwa die Punkte 3, 4, 5 in einer Geraden p liegen, so wären die Strahlenbüschel aus 1 und 2 perspektiv und die Gerade p wäre die Achse der Perspektivität. Das

Erzeugnis dieser perspektiven Strahlenbüschel 1 und 2 bestünde zunächst in der Geraden p, da sich ja entsprechende Strahlen stets auf p begegnen. Weiter gehört aber auch die Verbindungslinie 12 der Büschelmittelpunkte diesem Erzeugnis an. Denn in ihr fallen zwei entsprechende Strahlen der perspektiven Büschel ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammen, so dass jeder Punkt dieser Linie als Schnittpunkt dieser beiden entsprechenden Strahlen der perspektiven Büschel betrachtet werden kann. Bei perspektiven Büscheln besteht also das Erzeugnis in zwei Geraden, die Kurve

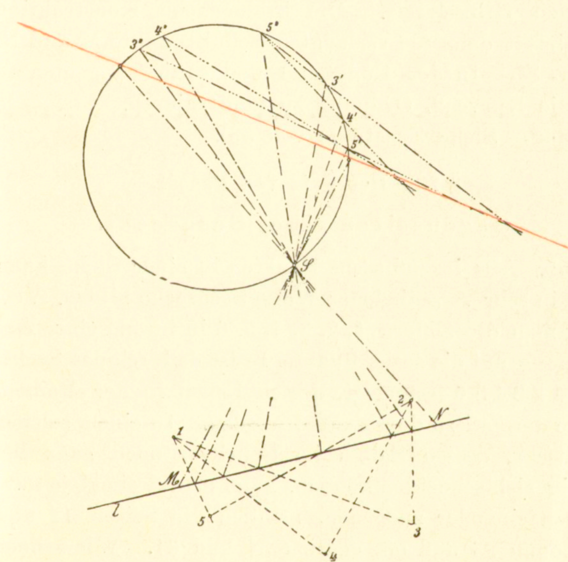


Fig. 28.

2. Ordnung ist, wie man sich ausdrückt, „zerfallen“ und zwar in zwei Gerade, d. h. zwei Kurven 1. Ordnung.

Aufg. 20. Eine Kurve 2. Ordnung ist gegeben durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5; die Schnittpunkte mit einer Geraden l zu konstruieren.

Lösung. Wir führen den in 52) angegebenen Gedankengang durch. Die Punkte 1 und 2 werden als Mittelpunkte der die Kurve erzeugenden Büschel genommen (Fig. 28); die Punktreihen, welche die gegebene Gerade l auf diesen Büscheln ausschneidet, projizieren wir aus S auf den gezeichnet vorliegenden Hilfs-Kreis. Die Steiner'sche Konstruktion liefert dann die verlangten Schnittpunkte M und N.

Aufg. 21. In den Punkten 1 und 4 die Tangenten an die Kurve 2. Ordnung zu konstruieren.

Lösung. Siehe Zusatz 1) von 53).

§ 20. Der Satz von Pascal.

Gegenseiten eines Sechsecks.

55. Aus irgend sechs Punkten in einer Ebene kann man in sehr verschiedener Weise Sechsecke bilden. Verteilt man die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 in irgend einer Anordnung auf die sechs Punkte, so ist dadurch das Sechseck 1 2 3 4 5 6 festgelegt, dessen Ecken in der Reihenfolge der Ziffern durchlaufen werden. In einem solchen Sechseck, dessen Seiten im Uebrigen noch ganz beliebig sich schneiden können, kann man dreimal je zwei Seiten einander zuordnen, nämlich die Seiten 12 und 45, dann 23 und 56, endlich 34 und 61. Wir nennen die zwei Seiten eines solchen Paares, zwischen denen immer vier Seiten des Sechseckes gelegen sind, „Gegen-

seiten". Schneiden sich 12 und 45 in X, 23 und 56 in Y, 34 und 61 in Z, so sind also X, Y, Z die Schnittpunkte der Gegenseiten und für jede Numerierung kann man diese drei Punkte konstruieren.

Das einer Kurve 2. Ordnung eingeschriebene Sechseck.

56. Betrachten wir jetzt in Fig. 27 das Sechseck der auf der Kurve k^2 gelegenen Punkte **ATSBS$_1$R**, das wir in dieser Reihenfolge mit 1 2 3 4 5 6 numerieren. Dann sind in ihm Gegen-Seiten **AT** und **BS$_1$**, ferner **TS** und **S$_1$R**, endlich **SB** und **RA**. Die Schnittpunkte dieser Gegenseiten sind der Reihe nach B_1, P, B und nach der Figur liegen diese drei Punkte auf einer Geraden. Vermöge dieser Eigenschaft fanden wir ja immer andere Punkte **A'** . . . der Kurve k^2. Die sechs Punkte **A**,**T** . . . . **R** können aber als sechs beliebige Punkte auf der Kurve 2. Ordnung betrachtet werden. Würde man sie in irgend einer andern Weise numerieren, so könnte man auch wieder die Punkte, auf welche die Zahlen 3 und 5 fallen, als Mittelpunkt der die Kurve erzeugenden Strahlenbüschel nehmen, die Punkte mit den Ziffern 2 und 6 liessen wir die Rolle der Punkte **R** und **T** spielen u. s. f. Wir erhalten dann ein neues Sechseck, aber auch in diesem müssen wiederum die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen, demnach ergibt sich der

Satz 25: „Sind irgend sechs Punkte auf einer Kurve 2. Ordnung gegeben und numeriert man sie in irgend einer Weise zu einem Sechseck, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseiten dieses Sechsecks auf einer Geraden."

Dies ist der wichtige Lehrsatz von Pascal, den dieser, 16 Jahre alt, im Jahre 1640 veröffentlichte. Ein Sechseck, in dem die Gegenseiten-Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, heisst auch ein Pascal'sches Sechseck und diese Gerade die Pascal-Linie (P. L.)

Wenn ferner bei der in 52) gegebenen Konstruktion die Punkte A' . . . ., die man für verschiedene durch P gehende Gerade erhielt, stets auf der Kurve 2. Ordnung k^2 lagen, so liefert dieses offenbar den

Satz 26: „Liegen in einem Sechseck, das irgendwie numeriert ist, die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden, so liegen die sechs Ecken des Sechsecks auf einer Kurve 2. Ordnung."

Es geht also die durch fünf der Ecken des Sechseckes bestimmte Kurve 2. Ordnung dann von selbst auch durch die letzte Ecke des Sechsecks. Ein Pascal'sches Sechseck ist mithin stets einer Kurve 2. Ordnung eingeschrieben. Wenn ferner bei irgend einer Numerierung in einem Sechseck die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen, so hat das Sechseck diese Eigenschaft bei jeder möglichen Numerierung.

Spezialisierungen des Pascal-Satzes.

57. Aus dem Pascal-Satz können wir noch andere, speziellere Sätze ableiten. Lassen wir von den Ecken des der Kurve eingeschriebenen Sechseckes die Ecke 2 der Ecke 1 auf der Kurve näher und näher rücken, so fällt schliesslich 2 mit 1 zusammen, so dass man bloss noch ein Fünfeck hat, als Verbindungsseite 12 aber

müssen wir die Tangente in 1 betrachten. Wie sich der Pascal-Satz dann modifiziert, dürfte aus Fig. 29^a zu entnehmen sein.

Ebenso können wir zweimal zwei Ecken des Sechseckes zusammenrücken lassen und erhalten dadurch zwei in den Fig. 29^b und 29^c dargestellte Sätze.

Wenn endlich dreimal zwei Ecken zusammenfallen, so ergibt sich der in Fig. 29^d zur Anschauung gebrachte

Satz 27: „Hat man ein einer Kurve 2. Ordnung eingeschriebenes Dreieck, so liegen die Schnittpunkte jeder Dreiecks-Seite mit der Tangente in der gegenüberliegenden Ecke in einer Geraden.“

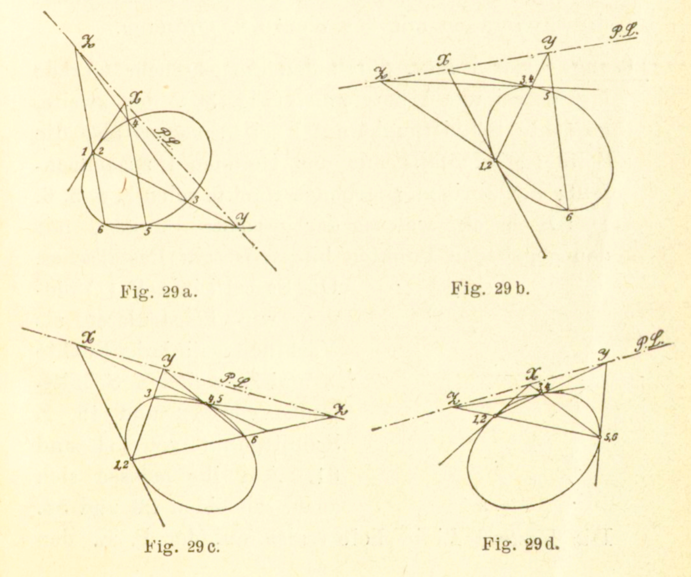


Fig. 29a.

Fig. 29b.

Fig. 29c.

Fig. 29d.

Anwendungen des Pascal-Satzes.

58. Der Pascal-Satz war, seiner Ableitung nach, nur ein anderer, bequemerer Ausdruck für die Konstruktion, vermittels welcher man entsprechende Strahlen in den projektiven Büscheln fand, die die Kurve 2. Ordnung erzeugten. Er kann daher auch benutzt werden, um von einer Kurve 2. Ordnung, welche irgendwie, z. B. durch fünf Punkte, bestimmt ist, weitere Punkte zu konstruieren. Wir lassen die beiden Aufgaben 1. Grades folgen, deren Lösung der Pascal-Satz leistet.

Aufg. 22. Fünf Punkte einer Kurve 2. Ordnung sind gegeben, sowie durch einen dieser Punkte eine Gerade. Man konstruiere den zweiten Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve 2. Ordnung.

Lösung. Der Punkt, durch den die gegebene Gerade l geht, sei mit 1 bezeichnet (Fig. 30), der zweite, gesuchte Schnittpunkt auf l sei 2, sodass also die Seite 12 jedenfalls mit der Geraden l zusammenfällt; die übrigen gegebenen Punkte seien 3, 4, 5, 6. Das Sechseck, welches der gesuchte Punkt 2 mit den gegebenen Punkten bildet, ist ein Pascal'sches.

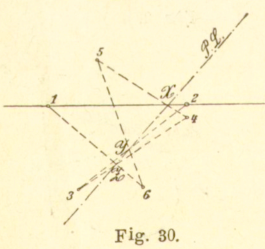


Fig. 30.

Die Pascal-Linie (P. L.) können wir konstruieren als Verbindungslinie der Punkte X und Z, wobei X Schnittpunkt von 12 und 45, Z Schnittpunkt von 34 und 61. Auf ihr müssen sich auch schneiden 23 und 56. Die letztere Linie liefert also auf der P. L. den

Punkt Y und 3Y schneidet den gesuchten Punkt 2 auf 1 aus.

Aufg. 23. Von einer Kurve 2. Ordnung sind fünf Punkte gegeben; in einem derselben die Tangente an die Kurve zu konstruieren.

Lösung. In der Absicht, uns ein Pascal'sches Sechseck bezw. Fünfeck zu numerieren, bezeichnen wir den Punkt, in dem die Tangente konstruiert werden soll, mit 1, 2 (Fig. 31); die andern gegebenen Punkte mit 3, 4, 5, 6. Dann kann man wieder die Punkte Y und Z der Pascal-Linie, also diese selbst konstruieren. Auf ihr schneidet 45 den Punkt X aus, durch den nach den Erörterungen von 57) die Tangente 12 im Punkte 1 geht.

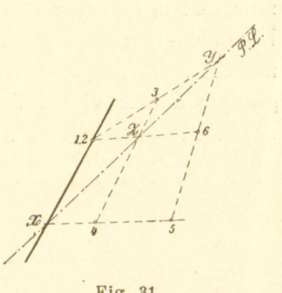


Fig. 31.

Eine andere Lösung der vorstehenden Aufgabe war in Aufgabe 21 angedeutet.

Ganz in ähnlicher Weise behandelt man die beiden folgenden Aufgaben.

Aufg. 24. Von einer Kurve 2. Ordnung sind vier Punkte gegeben und in einem derselben die Tangente. In einem der übrigen Punkte die Tangente an die Kurve zu konstruieren.

Aufg. 25. Von einer Kurve 2. Ordnung sind drei Punkte gegeben und in zweien derselben die Tan-

genten an die Kurve; im dritten Punkte die Tangente zu konstruieren.

§ 21. Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Punktreihen.

Die Kurve 2. Klasse.

59. Zwei in einer Ebene befindliche, projektiv auf einander bezogene Punktreihen g und g_1 liefern ein Erzeugnis, sofern wir je zwei entsprechende Punkte derselben durch eine Gerade verbinden. Wir erhalten zunächst ein Polygon, dessen Seiten von solchen Verbindungs-Geraden gebildet werden und schliesslich, nach Ausführung des Grenzübergangs, als Umhüllungsgebilde der ∞ vielen Verbindungsstrahlen eine Kurve, deren Tangenten eben alle diese Strahlen sind.

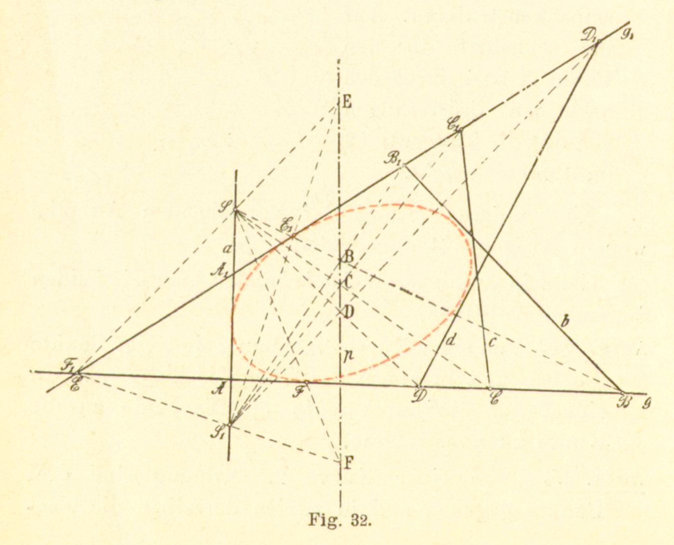


Fig. 32.

Um diese Kurve näher zu untersuchen, sei (Fig. 32) die projektive Beziehung von g und g_1 durch drei Paare entsprechender Punkte gegeben, A, A_1, B, B_1, C, C_1, welche verbunden drei Tangenten a, b, c der erzeugten Kurve liefern. Weitere Tangenten derselben finden wir unter Benutzung der in 31) Fig. 16 angegebenen Methode zur Konstruktion entsprechender Punkte der projektiven Punktreihen. Es werden also auf a die Punkte S und S_1 beliebig angenommen, sodann aus ihnen g und g_1 durch perspektive Strahlenbüschel projiziert, welche als perspektiven Schnitt die Gerade p liefern.

Zu einem beliebigen Punkte D auf g finden wir nun den entsprechenden D_1 auf g_1 mit Rücksicht darauf, dass sich SD und S_1D_1 wieder in einem Punkte **D** von p schneiden müssen. DD_1 ist dann eine weitere Tangente der erzeugten Kurve.

Unter Anwendung der gleichen Konstruktion finden wir jetzt auch die Punkte E_1 und F, welche dem Schnittpunkt von g und g_1 entsprechen, wenn wir ihn als E und F_1 bezeichnen. Es treten dabei die Hilfspunkte **E** und **F** auf. Dann ist aber g die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte F und F_1, während g_1 die entsprechenden Punkte E und E_1 verbindet. Also sind auch g und g_1 Tangenten der erzeugten Kurve, die wir $\varkappa^2$ nennen wollen.

Diese Kurve ist von der 2. Klasse, d. h. durch einen beliebigen Punkt P gehen, algebraisch gesprochen, zwei ihrer Tangenten. Dies erkennen wir an einer e i g e n e n Figur in folgender Weise. Um die durch P gehenden Tangenten der $\varkappa^2$ zu finden, haben

wir bloss zuzusehen, wie oft es vorkommen kann, dass eine Verbindungslinie entsprechender Punkte von g und g_1 durch P läuft. Projizieren wir nun aber die Punktreihen g und g_1 aus P je durch einen Strahlenbüschel, so haben die Doppelstrahlen dieser projektiven Büschel die Eigenschaft, Tangenten durch P an die Kurve $\varkappa^2$ zu liefern und nur für diese Doppelstrahlen tritt dies ein. Die Kurve $\varkappa^2$ ist also in der That von der 2. Klasse.

Wählen wir einen Punkt D auf g, so gehen durch ihn auch zwei Tangenten an $\varkappa^2$, die eine ist die Tangente g, die andere ist die Verbindungslinie d von D mit dem entsprechenden Punkt D_1. Diese zwei Tangenten sind immer verschieden, nur für den Punkt F fällt diese zweite Tangente auch mit g zusammen. Durch F gehen also zwei unendlich benachbarte Tangenten der $\varkappa^2$, also ist nach 51) F der Berührungspunkt von g mit der Kurve $\varkappa^2$. Ebenso ist natürlich E_1 der Berührungspunkt der Tangente g_1. Wir haben also

Satz 28: „Das Erzeugnis zweier projektiven, in der gleichen Ebene gelegenen Punktreihen ist eine Kurve 2. Klasse, welche auch die Träger der Punktreihen zu Tangenten hat. Die Berührungspunkte dieser beiden Tangenten sind die Punkte, welche den im Schnittpunkte der Träger vereinigten bezüglich entsprechen."

Weitere Eigenschaften der Kurve 2. Klasse.

60. In den soeben durchgeführten Betrachtungen waren die Tangenten g und g_1, die Träger der projektiven Punktreihen, vor den übrigen Tangenten wie a, b, c, ... ausgezeichnet. Wir wollen nun zeigen, dass irgend

zwei Tangenten der Kurve $\varkappa^2$ die Rolle von g und g_1 übernehmen können, in dem die übrigen Tangenten auch auf ihnen projektive Punktreihen ausschneiden.

Konstruieren wir wieder (Fig. 33), ausgehend von drei Paaren A, A_1, B, B_1, C, C_1 entsprechender Punkte, den perspektiven Schnitt p. Dieser treffe g und g_1 in zwei Punkten, die als Hilfspunkte Q und R betrachtet werden mögen. Dann erkennt man, dass S_1Q eine Tangente

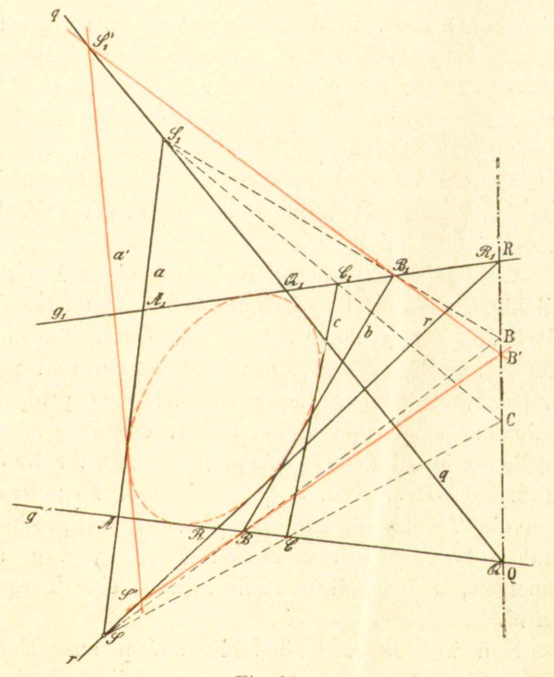


Fig. 33.

q der erzeugten Kurve (Q fällt mit **Q** zusammen, während Q_1 der Schnitt von S_1**Q** und g_1 ist) und ebenso ist S**R** eine Tangente r von $\varkappa^2$.

Statt nun von g, g_1, a, b, c als Tangenten der erzeugten Kurve $\varkappa^2$ auszugehen, können wir auch von g, g_1, b, r, q ausgehen, da ja r und q auch entsprechende Punkte der gegebenen projektiven Punktreihen g und g_1 ausschneiden.

Denken wir uns jetzt die Kurve $\varkappa^2$ tangentenweise konstruiert, in dem wir von g, g_1, a, b, c ausgehen. Dann seien drei beliebige ihrer Tangenten herausgegriffen, die wir mit b, r, q bezeichnen. Wir wollen nun die vorige Figur rekonstruieren mit diesen Elementen. Die Tangente r trifft g_1 in **R**, die Tangente q den Träger g in **Q**, die Tangente b schneidet auf g und g_1 zwei Punkte B und B_1 aus, die Verbindungslinie **QR** sei p.

Wählen wir dann auf p irgend einen Punkt **B'** beliebig, so möge B**B'** mit r den Schnittpunkt S', B_1**B'** mit q den Schnittpunkt S_1' liefern. Dann können wir mit S' und S_1' als Büschelmittelpunkten und p als perspektivem Schnitt dieser Büschel eine projektive Beziehung auf g und g_1 herstellen, die aber mit der gegebenen identisch sein muss, da sie mit ihr die drei Punktpaare BB_1, RR_1, QQ_1 gemein hat. Es muss also auch die Verbindungslinie $S'S'_1$ oder a' entsprechende Punkte der projektiven Punktreihen g und g_1 ausschneiden, also ist diese Linie a' auch eine Tangente von $\varkappa^2$.

Nun war **B'** noch beliebig auf p anzunehmen. Lassen wir **B'** auf p wandern, so beschreiben die Strah-

len aus B und B_1 nach **B'** perspektive Strahlenbüschel und diese Strahlenbüschel schneiden auf r und q bezüglich die Punkte S' und $S^{1\prime}$ aus. Es müssen also auch die Punktreihen S' und $S^{1\prime}$ als Schnitte mit perspektiven Büscheln projektiv sein oder mit andern Worten: die Geraden a', die sämtlich Tangenten der Kurve $\varkappa^2$, schneiden auf den Tangenten r und q projektive Punktreihen aus.

Die Analysis ergänzt diese Betrachtungen, indem sie zeigt, dass jede Kurve zweiter Klasse als Erzeugnis projektiver Punktreihen dargestellt werden kann. Demnach ergiebt sich

Satz 29: „Auf irgend zwei Tangenten einer Kurve zweiter Klasse schneiden die übrigen Tangenten dieser Kurve projektive Punktreihen aus".

Bestimmung einer Kurve 2. Klasse.

61. Aus der eben nachgewiesenen Erzeugung der Kurven zweiter Klasse ergiebt sich unmittelbar, dass man sich fünf Tangenten einer solchen Kurve beliebig geben darf, dass es also stets eine und nur eine solche Kurve giebt, welche fünf vorgegebene Gerade berührt.

Denn sind I, II, III, IV, V diese Geraden, so wählen wir etwa I und II aus und ordnen die Punkte einander zu, welche III, IV und V je auf ihnen ausschneiden. Dadurch ist die projektive Beziehung der Punktreihen auf I und II gerade festgelegt. Die durch diese Punktreihen erzeugte Kurve ist die verlangte. Es giebt nur eine solche Kurve, wie man ebenso zeigt wie in 54), also

Satz 30: „Es giebt eine und nur eine Kurve zweiter Klasse, welche fünf beliebige Gerade berührt".

Gehen von den fünf gegebenen Geraden drei, etwa III, IV und V durch einen Punkt S, so werden die Punktreihen auf I und II perspektiv. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden also den Strahlenbüschel S. Ausserdem fallen aber in dem Schnittpunkt von I und II entsprechende Punkte E und E_1 der perspektiven Punktreihen auf I und II zusammen. J e d e durch E gehende Linie kann mithin als eine Gerade gelten, welche entsprechende Punkte,

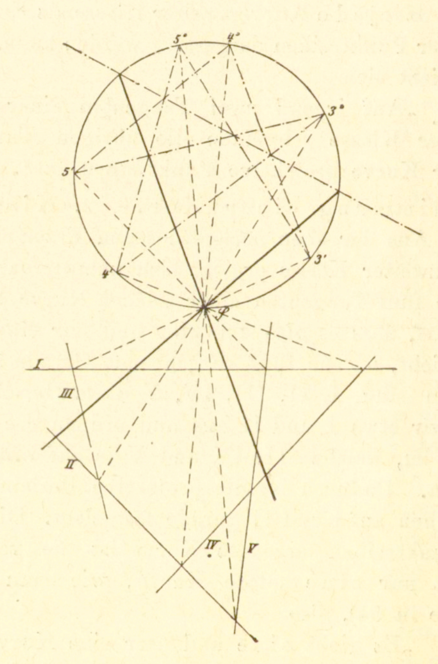


Fig. 34.

nämlich E und E_1, verbindet. Es gehört also auch der Strahlenbüschel E dem Erzeugnis der perspektiven Punktreihen auf I und II an. Das Erzeugnis perspektiver Punktreihen besteht folglich in zwei Strahlenbüscheln, deren Strahlen je den Büschelmittelpunkt umhüllen. Die Kurve zweiter Klasse ist in zwei Kurven erster Klasse zerfallen.

Aufg. 26: „Von einer Kurve zweiter Klasse sind fünf Tangenten gegeben, man zeichne die durch einen Punkt S an die Kurve gehenden Tangenten".

Lösung. In Verfolgung des in 59) bereits erörterten Gedankengangs greifen wir zwei der gegebenen Tangenten, etwa I und II heraus (Fig. 34), markieren die Punktreihen, welche die drei übrigen Tangenten auf ihnen ausschneiden und projizieren diese auf den Hilfskreis, von dem wir annehmen, dass er durch den gegebenen Punkt S gehe. Die Doppelstrahlen der dadurch entstehenden Strahlenbüschel, die nach 43) zu konstruieren sind, liefern die gesuchten Tangenten.

§ 22. Der Satz von Brianchon.

Gegenecken eines Sechsseits.

62. Irgend sechs Gerade in einer Ebene lassen sich in verschiedenster Weise zu einem Sechsseit zusammenfassen. Verteilen wir auf die sechs Gerade irgendwie die Numern I, II, III, IV, V, VI und durchlaufen die Seiten in der Reihenfolge der Nummern, so sind als Schnittpunkte aufeinanderfolgender Seiten auch sechs Ecken bestimmt, nämlich der Schnittpunkt von I und II, den wir als Punkt (I II) bezeichnen, der Punkt

(II, III) u. s. f., endlich der Punkt (VI, I). Es folgt also auf VI wieder I. (Cyclische Vertauschung.) Aus diesen sechs Ecken eines numerierten Sechsseits lassen sich drei Paare von „Gegenecken“ bilden, nämlich die Ecke (I, II) und (IV, V), dann (II, III) und (V, VI), endlich (III, IV) und (VI, I). Je zwei solche Gegenecken können wir durch eine Gerade verbinden und erhalten so drei Verbindungslinien von Gegenecken, die wir in der angegebenen Reihenfolge x, y, z nennen.

Das einer Kurve 2. Klasse umschriebene Sechsseit.

63. Betrachten wir jetzt in Fig. 33 das Sechsseit $a\,q\,g\,b\,g_1\,r$ und numerieren es in dieser Reihenfolge mit I II III IV V VI, so sind die Verbindungslinien der Gegenecken die drei Geraden $S_1\,B_1$, $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{R}$, $B\,S$, welche nach der Figur durch einen Punkt $\mathfrak{B}$ gehen. Die sechs Seiten des Sechsseits dürfen als sechs beliebige Tangenten der Kurve zweiter Klasse angesehen werden. Würde man sie in irgend einer andern Weise numerieren, so könnte man doch wieder die Tangenten, welche dann die Nummern III und V tragen, als erzeugende Punktreihen für die Kurve zweiter Klasse benutzen, ferner könnte man die Tangente mit der Nummer I die Rolle der Tangente a spielen lassen u. s. f., kurz man erhielte für das neue Sechsseit, das der andern Numerierung entspricht, auch wieder einen (andern) Punkt $\mathfrak{B}$, durch den die drei Verbindungslinien der Gegenecken hindurchgehen müssten. Es ist also bewiesen:

Satz 31: „Irgend sechs Tangenten einer Kurve zweiter Klasse liefern, auf irgend eine Weise nume-

riert, ein der Kurve umschriebenes Sechsseit, in dem sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkt schneiden".

Das ist der Lehrsatz von Brianchon, den dieser französische Gelehrte 1806 veröffentlichte. Den Punkt **B**, in dem sich die Verbindungslinien der Gegenecken schneiden, nennen wir den Brianchon'schen Punkt, (B. P.).

Aber auch eine Umkehrung dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Fig. 33. Dort fanden wir ja weitere Tangenten a' der Kurve zweiter Klasse, indem wir immer Sechsseite konstruierten, für welche sich S'B und S_1'B_1 in Punkten **B**' von **QR** begegneten. Wir können also auch behaupten:

Satz 32: „Wenn in einem irgendwie numerierten Sechsseit die Verbindungslinien der Gegenecken sich in einem Punkte schneiden, so ist das Sechsseit einer Kurve zweiter Klasse umschrieben, d. h. die Kurve zweiter Klasse, welche fünf dieser Seiten berührt, berührt von selbst auch die sechste Seite des Sechsseits".

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass sich die Sätze von Pascal und Brianchon nach dem Gesetz der Dualität entsprechen.

Spezialisierungen des Brianchon'schen Satzes.

64. Denken wir uns ein einer Kurve zweiter Klasse umschriebenes Sechsseit gegeben und halten wir fünf seiner Seiten, etwa I, III, IV, V, VI fest, während wir die Seite II sich so ändern lassen, dass sie sich der Seite I mehr und mehr nähert. Ist dann im

Grenzfall II mit I zusammgefallen, so haben wir statt des Sechsseits ein Fünfseit. Dagegen haben wir noch sechs Ecken. Denn als Schnittpunkt von I und II müssen wir den Berührungspunkt der Tangente I mit der Kurve nehmen. Der Brianchon'sche Satz lässt sich dann in entsprechender Weise für dies Fünfseit formulieren: es mag genügen, auf Fig. 35[a] zu verweisen, die den Satz veranschaulicht. Ferner können wir in dem Sechsseit zweimal zwei Tangenten zusammenfallen lassen, wodurch wir aus dem Brianchon-Satze Sätze über das Vierseit erhalten, das einer Kurve zweiter Klasse umschrieben ist. Die Figuren 35[b] und 35[c] werden hinreichen, um auch den Wortlaut derselben

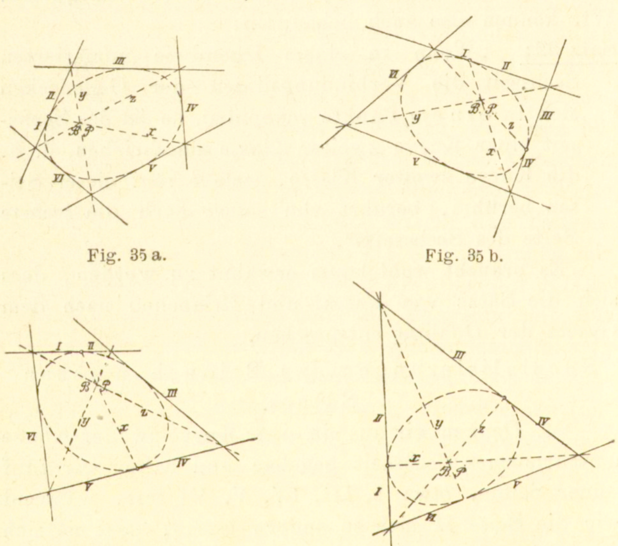


Fig. 35 a. Fig. 35 b.

Fig. 35 c. Fig. 35 d.

zu liefern. Fallen endlich dreimal zwei Tangenten zusammen, so erhalten wir (Fig. 35^d) den

Satz 33: „Hat man ein einer Kurve zweiter Klasse umschriebenes Dreieck, so gehen die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt".

Anwendungen des Brianchon'schen Satzes.

65. Nach Satz 32) können wir das Brianchon'sche Sechsseit benutzen, um von einer Kurve zweiter Klasse weitere Tangenten zu konstruieren und die beiden folgenden Aufgaben zu behandeln.

Aufg. 27: Von einer Kurve zweiter Klasse sind fünf Tangenten gegeben und auf einer derselben ein Punkt P. Man soll die zweite, durch diesen Punkt gehende Tangente der Kurve zeichnen.

Fig. 36.

Lösung. Wir numerieren uns ein Brianchon'sches Sechsseit. Die Tangente, auf der P liegt, sei I (Fig. 36), die gesuchte Tangente sei II, die übrigen gegebenen Tangenten erhalten die Nummern III, IV, V, VI. Dann ist P der Schnittpunkt (I, II). Die Linien x und z können wir zeichnen und sie liefern den Brianchon'schen Punkt (B. P.). Durch ihn und (V, VI) geht y und diese Linie schneidet auf III einen Punkt aus, der mit P verbunden die gesuchte Tangente giebt.

Aufg. 28: Eine Kurve zweiter Klasse ist gegeben durch fünf Tangenten, den Berührungspunkt einer derselben zu bestimmen.

Lösung. Die Tangente, deren Berührungspunkt bestimmt werden soll, bezeichnen wir mit I und II (Fig. 37), die übrigen mit III ... VI. Dann kann man zwei der Verbindungslinien der Gegenecken, nämlich z und y zeichnen, deren Schnitt der Brianchon'sche Punkt ist. Durch diesen und (IV, V) geht x und diese Linie schneidet auf I den Berührungspunkt T aus.

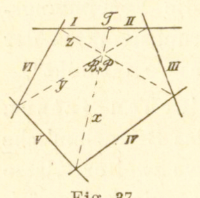


Fig. 37.

Ganz in ähnlicher Weise sind folgende Aufgaben zu behandeln:

Aufg. 29: Von einer Kurve zweiter Klasse sind fünf Tangenten gegeben; eine Tangente an die Kurve zu zeichnen, die parallel einer der gegebenen ist. Lösung wie Aufgabe 27), nur liegt P in unendlicher Ferne.

Aufg. 30: Von einer Kurve zweiter Klasse sind vier Tangenten gegeben und auf einer derselben ihr Berührungspunkt; man konstruiere die Berührungspunkte der anderen Tangenten.

Lösung. Brianchon'scher Satz für ein Vierseit.

Aufg. 31: Von einer Kurve zweiter Klasse sind zwei Tangenten gegeben und ihre Berührungspunkte, sowie eine dritte Tangente; man zeichne deren Berührungspunkt.

§ 23. Identität der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Die Mac-Laurin'sche Konfiguration.

66. Hatten wir eine Kurve zweiter Ordnung durch projektive Büschel erzeugt, so konnten wir in jedem

ihrer Punkte die Tangente bestimmen. Von welcher Klasse ist nun die erzeugte Kurve zweiter Ordnung?

Lag andererseits eine Kurve zweiter Klasse vor als Erzeugnis projektiver Punktreihen, so war auf jeder Tangente ein Punkt, der Berührungspunkt, festgelegt. Von welcher Ordnung ist die von den Berührungspunkten gebildete Kurve?

Um diese nahe liegenden Fragen zu beantworten, gehen wir aus von einer Kurve zweiter Klasse, die durch vier Tangenten a, b, c, d und den Berührungspunkt A von a bestimmt sein möge (Fig. 38). Die Berührungspunkte B, C, D von b, c, d, die damit dann schon gegeben sind, wollen wir nun nicht wie in Aufg. 30 mittels des Brianchon'schen Satzes bestimmen, sondern unter Benützung des Satzes 14) in 35). Für den vorliegenden Fall haben wir nun zu berücksichtigen, dass auf irgend zwei Tangenten einer Kurve zweiter Klasse die übrigen Tangenten projektive Punktreihen ausschneiden und ferner, dass die auf Grund des angezogenen Satzes zu konstruierende Linie p_0 die Berührungspunkte der beiden Tangenten ausschneidet (59). Die Tangenten a, b, c, d bilden nun ein vollständiges Vierseit. Es sei der Schnittpunkt von a und b mit M bezeichnet, also kurz (ab) = M, ebenso (cd) = M_1, ferner (ac) = N, (bd) = N_1, endlich (ad) = P und (bc) = P_1, so dass N, N_1, M, M_1, P, P_1 die drei Paare von Gegenecken des Vierseites. Weiter bezeichnen wir die Verbindungslinie NN_1 mit x, MM_1 mit y, PP_1 mit z.

Greifen wir jetzt zunächst die beiden Tangenten a und b heraus, so schneiden die übrigen Tangenten

c, d u. s. f. auf a und b projektive Punktreihen aus und zwar entsprechen den Punkten N, P bezüglich die Punkte P_1, N_1. Die Linie p_0 des Satzes 14) geht

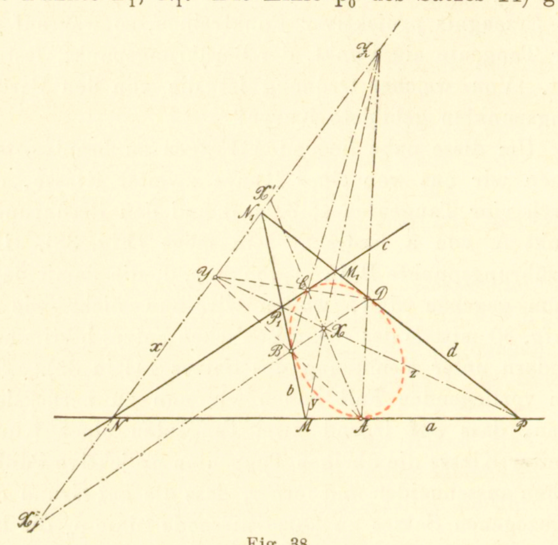


Fig. 38.

mithin durch den Schnittpunkt Y der Verbindungslinien PP_1 und NN_1 und ausserdem durch A. Es schneidet also die Verbindungslinie AY auf b den Berührungspunkt B aus.

Betrachten wir in gleicher Weise a und c als Träger projektiver Punktreihen, so haben wir M und M_1 sowie P und P_1 zu verbinden und deren Schnittpunkt X liefert mit A verbunden die Perspektivitäts-Achse, welche auf c den Berührungspunkt C ausschneidet. Die analogen Betrachtungen, durchgeführt für

die Paare a und d, b und c, b und d, endlich c und d, liefern dann folgendes Resultat: Wird noch der Schnittpunkt von NN_1 und MM_1 mit Z bezeichnet, so gehen AC und BD durch X, AB und CD durch Y, AD und BC durch Z. Wir haben also

Satz 34: „Irgend vier Tangenten a, b, c, d einer Kurve zweiter Klasse bestimmen ein vollständiges Vierseit mit den drei Verbindungslinien x, y, z der Gegenecken. Die Berührungspunkte A, B, C, D der vier Tangenten liefern ein vollständiges Viereck, in dem X, Y, Z die Schnittpunkte der Gegenseiten. Die Dreiecke X Y Z und x y z fallen dann zusammen".

Das System der Punkte und Geraden dieser Figur ist bekannt als die Mac-Laurin'sche Konfiguration.*)

Die Kurve zweiter Klasse ist von der zweiten Ordnung.

67. Lassen wir jetzt Bewegung in unsere Figur kommen, indem wir a, b, c festhalten, dagegen der Tangente d andere und andere Lagen geben, jedoch so, dass sie immer die Kurve zweiter Klasse berührt. Dabei ist AC eine feste Linie und bei jeder Wahl von d ergiebt sich auf ihr ein Punkt X.

Wir können aber auch umgekehrt X beliebig auf AC wählen und erhalten dann dazu eine Linie d, wenn wir uns der Führung der Figur anvertrauen. Liegen nämlich a, b, c, A, B, C, X und also auch M, N, P_1 gezeichnet vor, so schneidet die Verbin-

*) Mac-Laurin: De linearum geometricarum proprietatibus generalibus. (London 1748.)

dungslinie MX die Tangente c in M_1 und die Verbindungslinie P_1X trifft a in P. Dann ist leicht zu beweisen, dass M_1P eine Tangente d der Kurve zweiter Klasse und dass BX deren Berührungspunkt D ausschneidet. In der That numerieren wir uns ein Brianchon'sches Sechsseit, von dem I und II auf b, III auf c, IV und V auf M_1P und VI auf a fallen, so schneiden sich BD, P_1P und M_1M im Brianchonschen Punkt X, also ist (Satz 32) M_1P eine Tangente d der Kurve zweiter Klasse und D deren Berührungspunkt. (Fig. 35c.)

Dann muss sich aber auch die ganze Figur wie oben herstellen lassen. Bringen wir also BC mit MX in Z zum Schnitt und ziehen NZ, so liefert AB auf NZ den Punkt Y. Durch Y geht jetzt auch CD oder anders ausgedrückt: man kann D auch erhalten als Schnittpunkt der Strahlen BX und CY.

Lassen wir jetzt X auf AC fortrücken, so beschreibt der Strahl BX einen zur Punktreihe X perspektiven Strahlenbüschel und ebenso MX; der Punkt Z wandert auf der Geraden BC weiter, Y auf AB und der Strahl CY beschreibt einen Büschel um C.

Man hat mithin folgende Reihe von perspektiven Grundgebilden:

$$\begin{aligned}\text{Str. Büschel BX} &\,\overline{\wedge}\, \text{P.Reihe X} \,\overline{\wedge}\, \text{Str. Büschel MX}\\ &\,\overline{\wedge}\, \text{P.Reihe Z} \,\overline{\wedge}\, \text{Str. Büschel NZ}\\ &\,\overline{\wedge}\, \text{P.Reihe Y} \,\overline{\wedge}\, \text{Str. Büschel CY.}\end{aligned}$$

Also ist auch

$$\text{Str. Büschel BX} \,\overline{\wedge}\, \text{Str. Büschel CY.}$$

Folglich ist aber der Ort der Punkte D dargestellt als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel, also liegen

alle Berührungspunkte D der Tangenten der Kurve zweiter Klasse auf einer Kurve zweiter Ordnung, welche natürlich auch durch die Punkte A, B, C, D geht, da ja die bewegliche Tangente d auch mit a, b, c, d zusammenfallen kann.

Die entsprechende duale Betrachtung, deren Durchführung dem Leser angeraten wird, zeigt, dass die Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung eine Kurve zweiter Klasse bilden. Wir haben demnach

Satz 35: „Die Berührungspunkte der Tangenten einer Kurve zweiter Klasse liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung und die Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung bilden eine Kurve zweiter Klasse".

Ob man also von projektiven Punktreihen oder projektiven Strahlenbüschel ausgeht, man erhält die gleiche Kurve, nur das einemal tangentenweise, das anderemal punktweise erzeugt. Die Kurven zweiter Klasse sind auch von der zweiten Ordnung und umgekehrt. Wir wollen diese Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse „Kegelschnitte" nennen. Die Berechtigung dieser Bezeichnung wird in einem späteren Abschnitte dargethan werden.

§ 24. Die verschiedenen Arten der Kegelschnitte. Unendlich ferne Punkte. Asymptoten.

68. Wir wollen jetzt sehen, welche verschiedene Formen die Kegelschnitte annehmen können. Man teilt die Kegelschnitte ein nach ihrem Verhalten gegenüber der unendlich fernen Geraden der Ebene, in welcher der Kegelschnitt liegt. Der Kegelschnitt kann diese unendlich ferne Gerade nämlich entweder

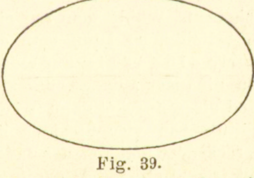
in zwei reellen Punkten schneiden oder sie gar nicht schneiden (d. h. in zwei imaginären Punkten) oder er kann sie berühren. Um für diese abstrakten Möglichkeiten geometrisch brauchbare Unterscheidungen zu erhalten, sei ein Kegelschnitt durch projektive Büschel S und S_1 erzeugt, deren projektive Beziehung durch drei Paare entsprechender Strahlen a, b, c, und a_1, b_1, c_1 festgelegt sein möge. Um nun die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der *unendlich fernen* Geraden zu bestimmen, haben wir nur das Verfahren, auf Grund dessen wir in 52) und Aufg. 20 die Schnittpunkte einer endlichen Geraden l mit dem Kegelschnitt bestimmten, entsprechend umzuändern. Da sich in jedem Punkte des Kegelschnittes entsprechende Strahlen der projektiven Büschel S und S_1 begegnen, so sind etwaige unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes dadurch ausgezeichnet, dass nach ihnen *entsprechende* Strahlen der Büschel S und S_1 laufen, die überdies noch *parallel* sind. Um solche Strahlen zu finden, verschieben wir den Büschel S_1 parallel zu sich selbst, bis S_1 nach S fällt. Dies führen wir aus, in dem wir durch S folgende Strahlen ziehen: $a_1' \parallel a_1$, $b_1' \parallel b_1$, $c_1' \parallel c_1$. Dann ist, wie leicht zu sehen, auch der Büschel (a, b, c) projektiv zum Büschel (a_1', b_1', c_1') wobei dem Strahl a der Strahl a_1' entspricht u. s. f. Die Doppelstrahlen dieser Büschel aber liefern entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1', die parallel laufen. Denn wenn $n = n_1'$ ein solcher Doppelstrahl, so ist $n_1 \parallel n_1'$, also auch $n \parallel n_1$. Die genannten Doppelstrahlen, die sich nach der Steiner'schen Konstruktion ermitteln lassen, geben folglich die *Rich-*

tungen, in denen unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes gelegen sind. Jede Parallele zu einer solchen Richtung geht auch durch diesen unendlich fernen Punkt der Kurve hindurch. Dies entspricht dem Umstand, dass durch irgend einen, im Endlichen gelegenen, Punkt einer Kurve ein Büschel von Strahlen hindurchgeht. Wie nun in diesem, eben genannten Strahlenbüschel die Tangente an die Kurve enthalten ist, so ist auch in dem Parallelstrahlenbüschel durch einen unendlich fernen Punkt einer Kurve ein Strahl vorhanden, der die Kurve in dem unendlich fernen Punkt berührt, also die Tangente in diesem Punkte. Wir nennen ganz allgemein die Tangente in einem unendlich fernen Punkt einer Kurve eine „Asymptote" der Kurve. Ihre Konstruktion bleibt ganz die gleiche wie die der Tangente, nur tritt an Stelle des im Endlichen gelegenen Punktes der durch eine Richtung gegebene unendlich ferne Punkt.

Ellipse, Hyperbel, Parabel.

69. Zurückkehrend zur Einteilung der Kegelschnitte müssen wir mithin folgende Fälle unterscheiden:

a) Die beiden projektiven Strahlenbüschel (a, b, c) und (a_1', b_1', c_1') haben keine Doppelstrahlen. Dann hat der erzeugte Kegelschnitt keine unendlich fernen Punkte, liegt also ganz im Endlichen. Man nennt ihn „Ellipse" (ἔλλειψις) (Fig. 39.) Sie kann speziell in den Kreis übergehen.*)


Fig. 39.

*) Es gibt Kurven höherer Ordnung, die infolge ihrer ovalen Form sich äusserlich nur wenig von einer Ellipse unter-

b) Die Doppelstrahlen der beiden projektiven Büschel sind reell. Der Kegelschnitt hat also zwei reelle, unendlich ferne Punkte. Er heisst Hyperbel (ὑπερβολή) (Fig. 40). Die Asymptoten sind a und b. Die Kurve besteht aus zwei Teilen, die sich den Asymptoten mehr und mehr nähern. Die Kurve hat nur

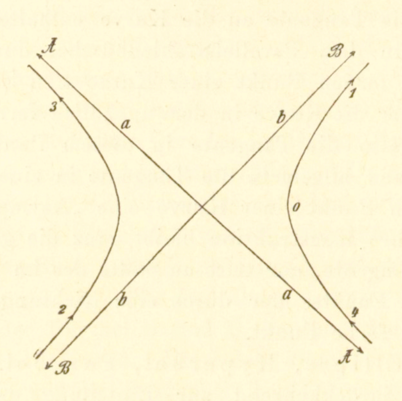


Fig. 40.

---

scheiden. Wählt man auf einer solchen Kurve zwei Punkte S und S_1 beliebig, so kann man die Strahlenbüschel S und S_1 durch die Kurve eindeutig auf einander beziehen, indem man solche Strahlen einander zuweist, die sich auf der Kurve begegnen. Trotzdem sind diese Büschel dann nicht projektiv und es ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen nicht gleich dem der entsprechenden Strahlen des andern. Denn analytisch betrachtet, schneidet irgend ein Strahl durch S die Kurve ausser in den zwei reellen Punkten noch in imaginären Punkten, die für die Rechnung ebenso zu berücksichtigen sind wie die geometrisch sichtbaren Punkte. Vergl. die Definition projektiver Grundgebilde in 30).

zwei unendlich ferne Punkte, nämlich die unendlich fernen Berührungspunkte A und B von a und b. Geht man auf der Kurve von o aus gegen 1 ins Unendliche, so kehrt man daraus über B zurück nach 2; geht man in der Richtung nach 3 ins Unendliche, so kehrt man auf der andern Seite der Asymptote über A nach 4 zurück. Die Kurve schliesst sich also durch das Unendliche hindurch.

c) Die beiden projektiven Strahlenbüschel haben einen Doppelstrahl. Die Kurve hat einen unendlich fernen (doppelt zählenden) Punkt, berührt also die unendlich ferne Gerade. Sie heisst Parabel (παραβολή) (Fig. 41). Die Asymptote derselben ist die unendlich ferne Gerade, auf ihr liegt der unendlich ferne Berührungspunkt P.

Diese Bezeichnungen der drei Kegelschnitte stammen schon von den Griechen her. Sie beziehen sich auf die eigentümliche Art und Weise, wie diese die Gleichungen dieser Kurven als Beziehungen zwischen Flächeninhalten deuteten.

Fig. 41.

Tangentenweise Konstruktion der Parabel.

70. Erzeugen wir einen Kegelschnitt durch projektive Punktreihen, so können wir ebenfalls, wenn auch weniger einfach, die drei Arten von Kegelschnitten unterscheiden. Wann die Parabel entsteht, ist sofort einzusehen: nämlich immer und nur dann, wenn die unendlich fernen Punkte der erzeugenden Punktreihen g und g_1 in der projektiven Beziehung einander entsprechen. Denn dann ist die Verbindungslinie dieser beiden unendlich fernen Punkte, also die unendlich ferne Gerade der Ebene, eine Tangente der erzeugten Kurve, diese muss also eine Parabel sein. Projektive Punktreihen, in denen sich die unendlich fernen Punkte entsprachen, nannten wir aber (39) ähnliche; folglich schneiden die Tangenten einer Parabel auf irgend zwei festen Tangenten derselben solche ähnliche Punktreihen aus. Daraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Tangenten einer Parabel.

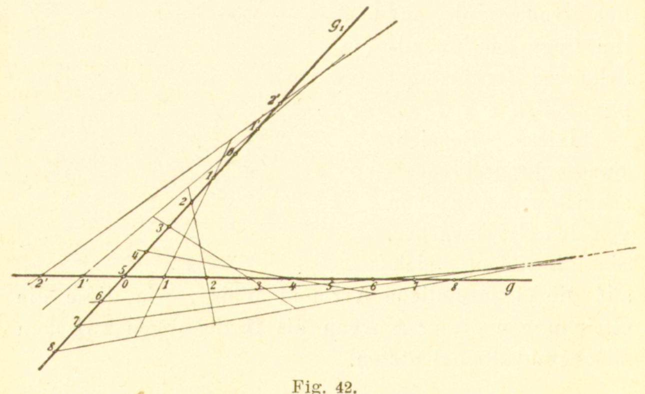


Fig. 42.

Sind g und g_1 die gegebenen Tangenten (Fig. 42) und bezeichnen wir deren Berührungspunkte mit 5 und 0, so teilen wir die Strecken von ihnen aus bis zum Schnittpunkt von g und g_1 je in fünf gleiche Teile. Dann liefern entsprechende Teilpunkte verbunden stets eine Tangente der Parabel. Durch Fortsetzung der Teilung erhält man, wie aus der Figur zu ersehen, weitere Tangenten derselben.

Aufgaben über die Hyperbel und Parabel.

71. Wir fügen hier noch einige Aufgaben bei, aus denen hervorgehen mag, wie unendlich ferne Elemente (Asymptoten, unendlich ferne Gerade) ganz ebenso konstruktiv verwendet werden können wie im Endlichen gelegene Bestimmungsstücke.

Aufg. 32. Von einer Hyperbel sind gegeben die Richtungen der Asymptoten und drei Punkte. Weitere Punkte der Kurve, sowie die Asymptoten selbst zu konstruieren.

Lösung. Sind s und s_1' die Richtungen der Asymptoten (Fig. 43), so sind also die unendlich fernen Punkte S und S_1 dieser Geraden Punkte der Hyperbel. Wir wählen sie als Mittelpunkte von die Kurve erzeugenden Strahlenbüscheln, die in diesem Falle in Parallelstrahlenbüschel übergehen. Durch die weiter gegebenen Punkte **A**, **B**, **C** sind dann den drei Strahlen a, b, c des Büschels S als entsprechende im Büschel S_1 die Strahlen a_1, b_1, c_1 zugewiesen. Wir konstruieren die projektive Beziehung der beiden Büschel nach 32), lassen aber zur Vereinfachung g mit a_1 und g_1 mit a zusammen-

fallen. Dann erhalten wir in bekannter Weise das Centrum P der Perspektivität (als Schnitt von BB_1 und CC_1) und zu irgend einem Strahle d den entsprechenden d_1, dessen Schnittpunkt D mit d der Hyperbel als Punkt angehört.

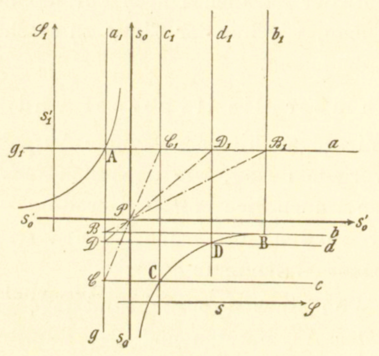


Fig. 43.

Um die Asymptoten, also die Tangenten in den Punkten S und S_1 zu finden, haben wir nach Satz 22) die Verbindungslinie SS_1 als Strahl des einen und des andern Büschels zu nehmen und immer den entsprechenden Strahl im andern Büschel zu suchen. Diese Verbindungslinie SS_1 ist hier die unendlich ferne Gerade und sie trifft g und g_1 in den unendlich fernen Punkten dieser Geraden. Man findet dann durch konsequente Durchführung der Konstruktion, dass die Asymptoten die Linien s_0 und s_0' sind, die durch P parallel zu s und s' laufen. — In der Figur stehen die Richtungen der Asymptoten aufeinander senkrecht. Eine solche Hyperbel heisst eine „gleichseitige".

Aufg. 33. Von einem Kegelschnitt sind gegeben ein unendlich ferner Punkt, sowie zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten. Man zeichne die Asymptote in dem gegebenen unendlich fernen Punkte.

Lösung. Sind a und b die Tangenten mit den Berührungspunkten A und B, während S der gegebene unendlich ferne Punkt (Fig. 44), so sei die gesuchte Asymptote die Verbindungslinie 12, A sei 3,4 und 5,6 falle mit B zusammen. Dann erhalten wir in dem Pascal-Sechseck 1 2 3 4 5 6 die Punkte Y und Z der Pascal-Linie (Satz 27) auf der sich auch 12 und 45 schneiden müssen. Es geht also durch diesen Schnittpunkt X die Asymptote s_0.

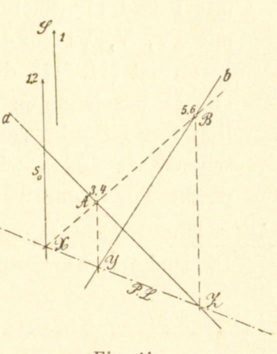


Fig. 44.

Man zeichne auch die zweite Asymptote.

Aufg. 34. Man löse die vorletzte Aufgabe 32 unter Anwendung des Pascal-Satzes.

Aufg. 35. Von einer Parabel sind vier Tangenten gegeben. Den Berührungspunkt einer derselben zu konstruieren.

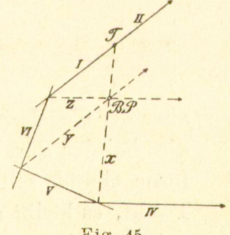


Fig. 45.

Lösung. Da der Kegelschnitt eine Parabel sein soll, so berührt er die unendlich ferne Gerade der Ebene;

diese unendlich ferne Gerade ist aber mit der Ebene gleichzeitig gegeben als fünfte Tangente. Um die Aufgabe zu lösen, bezeichnen wir diejenige Tangente, deren Berührungspunkt wir finden wollen, mit I und II, die unendlich ferne Gerade mit III, mit IV, V, VI die drei andern Tangenten (Fig. 45). Dann ist (II, III) der unendlich ferne Punkt der mit II bezeichneten Tangente, (III, IV) der unendlich ferne Punkt von IV. Durch den Brianchonschen Satz finden wir nun leicht den Berührungspunkt T auf der Tangente I.

Aufg. 36. Parallel einer gegebenen Richtung an eine Parabel die Tangente zu konstruieren.

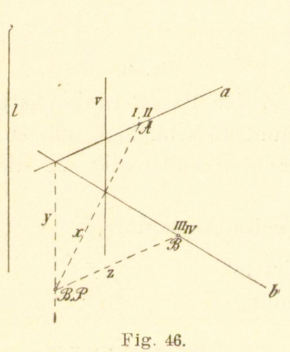


Fig. 46.

Lösung. Verlangt man, parallel einer gegebenen Geraden l die Tangenten an einen beliebigen Kegelschnitt zu finden, so gibt es deren zwei. Denn die Aufgabe kommt darauf hinaus, durch den Schnittpunkt von l mit der unendlich fernen Geraden die Tangenten an den Kegelschnitt zu legen. Berührt aber der Kegelschnitt die unendlich ferne Gerade, wie dies bei der Parabel der Fall ist, so ist die unendlich ferne Gerade selbst eine der Tangenten durch diesen Punkt, es bleibt also bloss noch eine im Endlichen gelegene Tangente, parallel der Geraden l, die Aufgabe wird eine lineare.

Ist nun die Parabel etwa gegeben durch zwei Tangenten a und b mit ihren Berührungspunkten A und B (Fig. 46), so numerieren wir uns ein Brianchon-sches Sechsseit. I, II fallen auf a, III und IV auf b, V sei die gesuchte, zur gegebenen Geraden l parallele, Tangente, VI sei die unendlich ferne Gerade. Dann ergibt sich V wieder durch Konstruktion des Brianchon-schen Punktes, wobei noch zu beachten, dass der Schnittpunkt (V, VI) natürlich der unendlich ferne Punkt von l ist.

Aufg. 37. Eine Parabel ist gegeben durch vier Tangenten. Ihren unendlich fernen Punkt (die Richtung der Achse) zu bestimmen.

Lösung. Bezeichnen wir (Fig. 47) die vier gegebenen Tangenten mit I, II, III, IV, die unendlich ferne Gerade mit V und VI, so gibt die Linie y, welche in dem Brianchon'schen Sechsseit nach dem Berührungspunkt (V, VI) läuft, die Richtung, in welcher der unendlich ferne Punkt der Parabel liegt.

Fig. 47.

VI. Abschnitt.

Die Polarentheorie der Kegelschnitte.

§ 25. Pol und Polare.

Konjugierte Punkte und konjugierte Gerade.

72. Liegt ein Kegelschnitt k^2 gegeben vor und ist g eine Gerade, welche ihn in den Punkten A und B trifft (Fig. 48), so kann man zu irgend einem Punkte X von g den vierten harmonischen X' bezüglich A und B konstruieren, so dass also $(X X' A B) = -1$. Wir nennen dann zwei solche Punkte X und X' „konjugiert" in Bezug auf den Kegelschnitt.

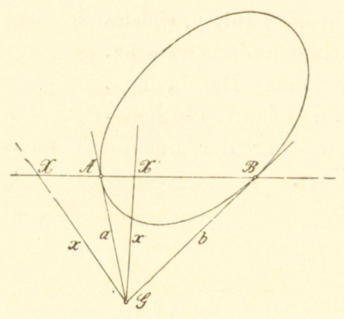


Fig. 48.

Würde die Gerade g den Kegelschnitt berühren, so vereinigen sich A und B in einen Punkt, etwa C. Der vierte harmonische zu einem Punkt X fiele dann,

wo auch X auf der Tangente liegen mag, wieder mit C zusammen. Zu jedem Punkte einer Tangente ist also der Berührungspunkt konjugiert.

Gehen andererseits von einem Punkte G aus zwei Tangenten a und b an den Kegelschnitt, so kann man zu irgend einer Geraden x durch G den vierten harmonischen Strahl x' bestimmen in Bezug auf a, b. Es ist also dann $(x\,x'\,a\,b) = -1$. Wir nennen zwei solche Strahlen x, x' „konjugierte Gerade" in Bezug auf den Kegelschnitt. Fällt G auf den Kegelschnitt nach G_0, so fallen die beiden Tangenten in eine zusammen, nämlich in die Tangente c in G_0 an den Kegelschnitt. Zu irgend einer Geraden durch den Punkt G_0 des Kegelschnittes ist dann c stets die konjugierte Gerade. — In der rechnenden Geometrie kann man diese Definition konjugierter Punkte und Geraden formal übertragen auf den Fall, wo die Gerade g den Kegelschnitt nicht schneidet oder wo von dem Punkte G aus keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt möglich sind.

Wir stellen uns jetzt die Fragen: Wo liegen überhaupt alle Punkte, die zu einem gegebenen Punkte X konjugiert sind in bezug auf einen Kegelschnitt? Ferner: Was für eine Kurve umhüllen alle Geraden, die zu einer gegebenen Geraden x konjugiert sind in Bezug auf einen Kegelschnitt?

Polare eines Punktes.

73. Wir gehen aus von der Mac-Laurin'schen Konfiguration, wie sie in Fig. 38 erörtert worden. Bringen wir dort noch AC in X', BD in X'' zum

Schnitt mit NN_1, so folgt aus dem Viereck 'ABCD, dass sowol (XX'AC) = — 1 als auch (XX"BD) = — 1.

Es sei nun der Kegelschnitt gegeben, sowie der Punkt X; durch X ziehen wir eine Sehne AC beliebig. Bringen wir dann die Tangenten a und c in A und C in N zum Schnitt und konstruieren ferner X' als den vierten harmonischen zu X bezüglich A und C, so ist durch N und X' die Linie NN_1 oder x festgelegt. Wie man also auch eine Sehne BD durch X zieht, der vierte harmonische X" zu X bezüglich B und D muss stets auf dieser Linie x gelegen sein. Diese Gerade x ist demnach der Ort aller zum Punkte X konjugierter Punkte. Wir nennen sie die „Polare des Punktes X" in Bezug auf den Kegelschnitt. Auf ihr müssen sich dann auch die Tangenten b und d in B und D begegnen. Ebenso ist XZ oder y die Polare von Y und XY oder z die Polare von Z.

Wir haben also folgende Eigenschaften der Polaren eines Punktes, die wir durch die Fig. 49 zur Anschauung bringen, erhalten:

Satz 36: „Hat man einen Punkt X und einen Kegelschnitt und zieht durch ihn alle möglichen Linien, welche in A,B; C,D; E,F u. s. f. den Kegelschnitt treffen, und konstruiert man

1) Zu A,B; C,D; E,F u. s. f. den vierten harmonischen in Bezug auf X,
2) die zwei andern Nebenecken der vollständigen Vierecke ABCD, ABEF u. s. f.
3) die Schnittpunkte der Tangenten in A und B, in C und D u. s. f.

4) die Berührungspunkte der allenfalls von X aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten,

so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden x, der Polaren des Punktes X".*)

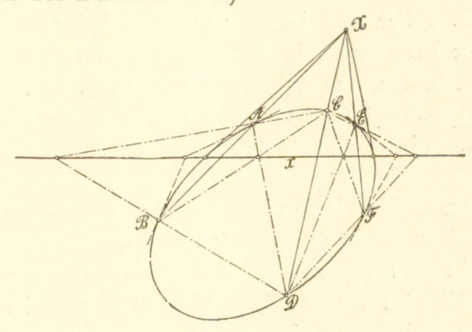


Fig. 49.

Pol einer Geraden.

74. Ganz in ähnlicher Weise zeigen wir, dass alle zu einer Geraden x konjugierten Geraden durch einen Punkt X gehen, den wir den „Pol“ von x nennen. In der That denken wir uns in Fig. 38 noch die Linien NX und N_1X gezogen, die mit x' bezw. x" bezeichnet werden mögen, so ist sowol (xx'ac) = — 1 als auch (xx"bd) = — 1. Haben wir nun x oder NN_1 beliebig angenommen, ferner von einem Punkte N aus die Tangenten a und c an den Kegelschnitt gezogen, welche in A und C berühren, so können wir X schon bestimmen als Schnittpunkt von AC und dem Strahle x',

*) In dieser Figur, sowie in den folgenden, ist der Bequemlichkeit wegen als Kegelschnitt eine Ellipse gewählt. Selbstverständlich gelten die Sätze für jeden Kegelschnitt, sofern nicht ausdrücklich Etwas Anderes bemerkt ist.

der zu x harmonisch ist bezüglich a und c. Wo dann auch auf x ein Punkt N_1 weiter angenommen wird, immer muss die Berührungssehne BD der durch N_1 gehenden Tangenten b und d durch den bereits festgelegten Punkt X gehen und immer muss auch der Strahl x'', der zu x harmonisch in Bezug auf b und d, ebenfalls durch X laufen. Damit ergibt sich (Fig. 38).

Satz 37: „Legt man von den Punkten einer Geraden x aus die Tangentenpaare an einen Kegelschnitt und konstruiert:

1) zu x den vierten harmonischen Strahl bezüglich eines solchen Tangentenpaares,
2) in dem von zwei solchen Tangentenpaaren gebildeten vollständigen Vierseit die zwei andern Verbindungslinien der Paare von Gegen-Ecken,
3) die zu einem Tangentenpaar gehörige Berührungssehne (Verbindungslinie der Berührungspunkte),
4) in den (etwaigen) Schnittpunkten von x mit dem Kegelschnitt die Tangenten,

so gehen alle diese Linien durch einen Punkt X, den Pol von x.“

Natürlich gehört zu X wieder x als Polare. Ferner folgt aus 3) in den beiden letzten Sätzen noch:

Zusatz: „Liegt der Punkt X auf dem Kegelschnitt, so wird seine Polare die Tangente und ebenso wird der Pol einer Tangente der Berührungspunkt derselben“.

Aufg. 38. Zerfällt der Kegelschnitt (die Kurve 2. Ordnung) in zwei Gerade, so ergibt sich aus Satz 36 der früher in 28) erwähnte Satz. Welcher Satz

ergibt sich, wenn der Kegelschnitt (als Kurve 2. Klasse) in zwei Punkte zerfällt?

§ 26. **Das Polardreieck.**

75. Wählen wir einen Punkt X in der Ebene eines Kegelschnittes beliebig und zeichnen seine Polare x; auf x sei der Punkt Y beliebig angenommen. Dann muss die Polare y von Y jedenfalls durch X gehen, da X und Y konjugierte Punkte. Der Schnittpunkt von x und y sei Z. Dieser Punkt Z ist konjugiert zu X und Z ist auch konjugiert zu Y, also ist XY oder z die Polare des Punktes Z. In XYZ haben wir folglich ein Dreieck erhalten von der Eigenschaft, dass jede seiner Ecken die gegenüberliegende Seite zur Polaren hat. Wir nennen ein solches Dreieck ein „Polardreieck" des Kegelschnittes.

Wir haben schon in Fig. 38 in XYZ ein Polardreieck erhalten; aus dieser Figur können wir entnehmen, wie man sich in anderer Weise ein solches Polardreieck verschaffen kann. Sind nämlich A, B, C, D irgend vier Punkte auf dem Kegelschnitt, so konstruieren wir in dem vollständigen Viereck derselben die drei Nebenecken: diese bilden dann ein Polardreieck. — Ist umgekehrt in Fig. 50 ein Polardreieck XYZ konstruiert, so finden wir in folgender Weise eine Gruppe von Punkten A, B, C, D, die zu ihm in der gleichen Beziehung steht. Wir wählen A beliebig irgendwo auf dem Kegelschnitt, ziehen AZ, welche Linie zum zweitenmal in B den Kegelschnitt trifft; dann verbinden wir X mit A und B, wodurch wir die Schnittpunkte C und D auf diesen Verbindungslinien

erhalten. Dann muss der Schnittpunkt von CD und AB auf der Polaren x von X liegen, also muss CD durch Z gehen. Ebenso müssen AD und BC durch

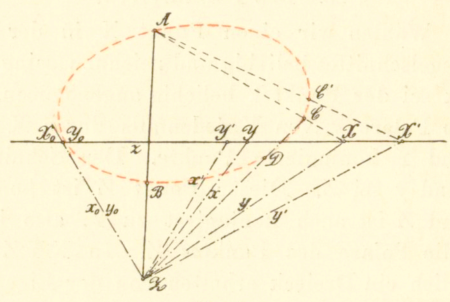


Fig. 50.

Y laufen. — Lassen wir jetzt den Punkt X auf z fortrücken und konstruieren für jede Lage seine Polare. Um also die Polare für X' zu finden, ziehen wir AX', welche Linie den Kegelschnitt nochmals in C' trifft. Dann liefert BC' auf z den Punkt Y', sodass ZY' oder x' die Polare von X' ist. Es ist folglich

P. Reihe (X,X' . . .) $\overline{\overline{\wedge}}$ Str. Büschel A (X,X' . . .)
$\overline{\overline{\wedge}}$ Str. Büschel B (C,C . . .)
$\overline{\overline{\wedge}}$ P. Reihe (Y,Y' . . .)
$\overline{\overline{\wedge}}$ Str. Büschel Z (Y,Y' . . .)

Also ist auch die Punktreihe X,X' . . . projektiv zum Büschel x, x' . . . der Polaren und wir erhalten

Satz 38: „Rückt ein Punkt X auf einer Geraden z fort, so beschreibt seine Polare x in Bezug auf einen Kegelschnitt einen Strahlenbüschel um den Pol Z von z und dieser Strahlenbüschel ist projektiv zu der von dem Punkte beschriebenen Punktreihe.“

Dreht sich eine Gerade um einen Punkt Z, so bewegt sich ebenso der Pol dieser Geraden auf der Polaren z dieses Punktes.

Wir erhalten also in der Fig. 50 ein System von Polardreiecken XYZ, X'Y'Z' u. s. f., die alle die Ecke Z gemeinsam haben, während die gegenüberliegenden Seiten auf der Geraden z liegen.

Aufg. 39. Man beweise den Satz: Die sechs Ecken zweier Polardreiecke eines Kegelschnittes liegen auf einem Kegelschnitt, ihre sechs Seiten berühren einen zweiten Kegelschnitt.

Die zu einer Geraden und zu einem Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt gehörige Involution.

76. Die Punktreihe X,X' . . . ist nicht bloss projektiv zur Punktreihe Y,Y' . . ., sondern sie liegt zu ihr involutorisch, da ja die Polare y von Y durch X geht. Die Paare X,Y, X',Y'. . . bilden eine Punktinvolution, eben die Involution konjugierter Punkte auf z. Ebenso bilden die Strahlenpaare x,y, x',y' . . . eine Involution, die Involution konjugierter Geraden durch Z. Schneidet z den Kegelschnitt in reellen Punkten, so sind dies die Doppelpunkte der Punktinvolution (z. B. X_0,Y_0). Gehen von Z aus reelle Tangenten an den Kegelschnitt, so liefern diese die Doppelstrahlen der Strahleninvolution (z. B. x_0,y_0). Aber auch wenn z den Kegelschnitt nicht in reellen Punkten trifft, so kann man trotzdem die Punktinvolution nach dem eben Bemerkten festlegen. Sie wird dann natürlich eine elliptische und kann dazu dienen, die ima-

ginären Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt in geometrisch brauchbarer Weise zu ersetzen. Wenn ferner von Z aus keine Tangenten an den Kegelschnitt gezogen werden können, so wird die Involution der konjugierten Geraden durch Z, die immer noch bestimmt werden kann, eine elliptische. Statt der imaginären Tangenten von Z aus führt man dann diese Involution in die Betrachtung ein. Berührt z den Kegelschnitt, oder fällt Z auf denselben, so wird die zu z oder Z gehörige Involution eine parabolische.

Das Dualitäts-Gesetz in der Ebene.

77. Ist in einer Ebene ein Kegelschnitt k^2, speziell etwa auch ein Kreis, gegeben und irgend eine Figur, so kann man zu jedem Punkte die Polare, zu jeder Geraden den Pol in Bezug auf k^2 zeichnen. Den Punkten einer Geraden entsprechen dann nach Satz 38) Gerade, die alle durch den Pol dieser Geraden gehen. Vier Punkten einer Geraden entsprechen also vier Strahlen durch einen Punkt und es ist überdies das Doppelverhältnis der vier Strahlen = dem der vier Punkte. Dem Schnittpunkt zweier Geraden entspricht die Verbindungslinie der Pole der beiden Geraden u. s. f. Wir erhalten dann aus der ersten Figur eine zweite, die ihr genau nach dem Dualitäts-Gesetz der Ebene 7) a entspricht. Jetzt ist aber zwischen den beiden Figuren auch ein direkter, geometrischer Zusammenhang hergestellt, sie sind „reciprok“ zueinander in Bezug auf den Kegelschnitt. Irgend einer Kurve als Ort von Punkten entspricht eine Kurve, eingehüllt von den entsprechenden Geraden. Die Klasse dieser letztern ist = der Ordnung der ersten Kurve. Die

Punkte des Kegelschnittes k^2 sind dadurch ausgezeichnet, dass die ihnen entsprechenden Geraden, nämlich die Tangenten von k^2, durch sie hindurchgehen.

§ 27. **Mittelpunkt, Durchmesser.**

Der Mittelpunkt.

78. Aus den allgemeinen Sätzen der Polarentheorie erhalten wir wieder spezielle, metrische, wenn wir das Unendlich-Ferne hereinziehen. Wir haben die Annahme als zulässig und notwendig erkannt, dass alle unendlich fernen Punkte einer Ebene auf einer Geraden liegen. Auch zu dieser unendlich fernen Geraden können wir dann den Pol zeichnen in Bezug auf einen Kegelschnitt und wir erhalten ihn, indem wir von den Punkten der unendlich fernen Geraden aus Tangentenpaare an den Kegelschnitt legen. Die zugehörigen Berührungssehnen gehen alle durch diesen Pol. Wir nennen den Pol der unendlich fernen Geraden den „Mittelpunkt“ des Kegelschnittes, jede durch ihn gehende Sehne einen „Durchmesser“. Die beiden Schnittpunkte eines Durchmessers mit dem Kegelschnitt müssen harmonisch getrennt werden durch den Mittelpunkt und durch den Schnittpunkt des Durchmessers mit der unendlich fernen Geraden, also muss jeder Durchmesser im Mittelpunkt halbiert werden (Satz $36,_1$).

Für die Ellipse und Hyperbel liegt der Mittelpunkt im Endlichen, bei der letzteren ist er (Satz $37,_4$) der Schnittpunkt der Asymptoten; für die Parabel, welche die unendlich ferne Gerade berührt, fällt der Mittelpunkt in den Berührungspunkt der unendlich

fernen Geraden, also in den unendlich fernen Punkt der Parabel. Alle Durchmesser der Parabel sind folglich parallel.

Es hat sich mithin ergeben:

<u>Satz 39:</u> „Die Verbindungslinien der Berührungspunkte

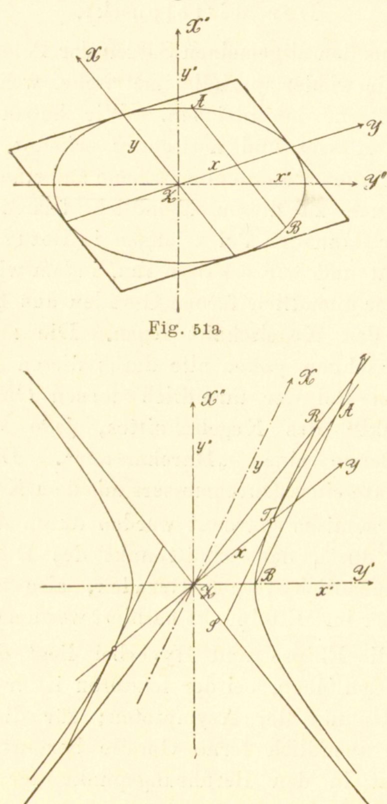


Fig. 51a

Fig. 51b.

paralleler Tangenten eines Kegelschnittes (Ellipse oder Hyperbel) gehen alle durch den Mittelpunkt und heissen Durchmesser. Jeder Durchmesser wird im Mittelpunkt halbiert.“ (Fig. 51^a und 51^b.)

Konjugierte Durchmesser.

79. Nehmen wir jetzt in Figur 50 z als die unendlich ferne Gerade. Dann wird Z der Mittelpunkt des Kegelschnittes. (Fig. 51^a und 51^b) Die Linien xy, x'y' werden konjugierte Gerade durch den Mittelpunkt: wir nennen sie „konjugierte Durchmesser“. Jeder von ihnen ist also die Polare des unendlich fernen Punktes des andern. Zieht man zu einem der konjugierten Durchmesser eine parallele Sehne AB, so muss die Mitte dieser Sehne auf dem konjugierten Durchmesser liegen, da sie harmonisch liegt zu X bezüglich A und B. In Bezug auf konjugierte Durchmesser zeigt also der Kegelschnitt eine „schiefe Symmetrie“. Dies liefert

Satz 40: „Die konjugierten Geraden durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes liefern die Involution der konjugierten Durchmesser. Jeder von zwei konjugierten Durchmessern halbiert alle Sehnen, die zum andern parallel laufen. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zum konjugierten Durchmesser. Je zwei konjugierte Durchmesser bilden mit der unendlich fernen Geraden ein Polardreieck“. (Fig. 51^a und 51^b.)

Hat man (Fig. 51^c) eine Parabel und sind AB, A'B',... parallele Sehnen, M,M'... deren Mitten, so liegen diese alle auf einem Durchmesser, der durch den

unendlich fernen Punkt S der Parabel geht. Der Durchmesser schneidet die Parabel nochmals in T und die Tangente in diesem Punkte ist parallel AB.

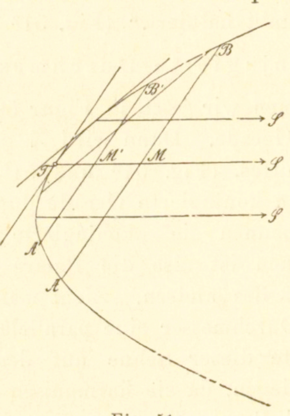


Fig. 51c.

Zusatz. Man kann zeigen, dass in der Involution der konjugierten Durchmesser ein und nur ein Paar vorhanden ist, dessen Strahlen aufeinander senkrecht stehen. (x''y''). Dies liefert die Richtungen der „Achsen“ des Kegelschnittes. Nur für den Kreis stehen konjugierte Durchmesser immer aufeinander senkrecht.

Für die Hyperbel besitzt die Involution der konjugierten Durchmesser reelle Doppelstrahlen; dies sind die Asymptoten. Jede Asymptote ist also zu sich selbst konjugiert. Irgend zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel trennen die Asymptoten harmonisch. (Vergl. 75).

Daraus folgt sofort, dass der Berührungspunkt T

einer Tangente (Fig. 51[a]) in der Mitte des Abschnittes RS liegt, den die Asymptoten auf der Tangente erzeugen.

Aufg. 40. Schneidet eine beliebige Gerade eine Hyperbel in den Punkten A und B und die Asymptoten in C und D, so ist CA = BD. Beweis durch Anwendung des soeben bewiesenen Satzes über die Tangente.

Aufg. 41. Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte oder fünf Tangenten gegeben. Seinen Mittelpunkt zu konstruieren.

Lösung. Man verschaffe sich parallele Tangenten und damit einen Durchmesser.

Aufg. 42. Man betrachte die Mac Laurin'sche Konfiguration (Fig. 38) für den Fall, dass z die unendlich ferne Gerade ist und leite auf diese Weise den Satz ab: In irgend einem, einem Kegelschnitt umschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser.

VII. Abschnitt.

Die Kegel- und Regel-Flächen 2. Ordnung als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde.

§ 28. Ueber Flächen im Allgemeinen.

Regelflächen.

80. Unter einer Fläche (z. B. einer Ebene, einer Kugel, einem Kegel) verstehen wir den Inbegriff von zweifach unendlich vielen (∞^2) Punkten, die durch ein mathematisches Gesetz bestimmt werden können. In

der rechnenden Geometrie wird eine Fläche definiert durch eine Gleichung, der die Koordinaten (x, y, z) eines jeden ihrer Punkte genügen müssen.

Eine Fläche kann in Sonderheit die Eigenschaft haben, dass sie erzeugt werden kann durch Bewegung einer festen Kurve, die wir uns etwa aus Draht hergestellt denken. Im einfachsten Falle wird diese Kurve eine Gerade sein. Die Flächen, die auf diese Weise durch Bewegung einer Geraden entstehen, heissen allgemein „Regelflächen". Sie enthalten, gemäss ihrer Erzeugung, ein einfach unendliches System von geraden Linien, die wir die „Erzeugenden" der Fläche nennen. Solche „geradlinige" Flächen treten uns entgegen, sobald wir die Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe betrachten, die beliebig im Raume liegen, wie ja z. B. zwei beliebig im Raume gelegene projektive Punktreihen nach 50) als Erzeugnis ein solches System von einfach unendlich vielen, im Raume angeordneten Geraden lieferten.

Wir können nun zwei durchaus verschiedene Typen von Regelflächen unterscheiden je nach dem Verhalten unendlich benachbarter Erzeugenden der Fläche. Folgende Fälle sind nämlich zu trennen:

a) Irgend zwei unendlich benachbarte Erzeugende der Fläche schneiden sich stets. Dann bestimmen dieselben eine Ebene und der zwischen den Erzeugenden gelegene Teil der Ebene ist ein Element der Fläche. Es sind also die Elemente der Fläche sämtlich eben. (Fig. 52). Eine solche Fläche (die auch durch Bewegung einer Ebene erzeugt werden kann) heisst eine „abwickelbare" (développable.) Irgend

zwei einander nicht unendlich benachbarte Erzeugende der Fläche brauchen sich natürlich nicht zu schneiden.

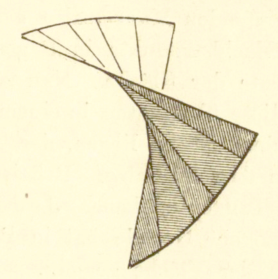


Fig. 52.

Die einfachste abwickelbare Fläche ist der „Kegel". Er entsteht, wenn eine Gerade sich irgendwie bewegt, während einer ihrer Punkte festgehalten wird. Dieser fixierte Punkt heisst die „Spitze" des Kegels. Liegt die Spitze im Unendlichen, bewegt sich also eine Gerade irgendwie, aber stets parallel zu sich selbst, so entsteht aus dem Kegel der „Cylinder".

b) Je zwei unendlich benachbarte Gerade der Flächen schneiden sich nicht. Die einzelnen Elemente der Fläche sind nicht eben, sondern gekrümmt, da zwei Nachbargerade auf der Fläche, so nahe aneinander man sie auch wählen mag, sich nicht schneiden, sondern windschief zu einander verlaufen. Solche Flächen heissen „windschiefe" Regelflächen. Wir werden ein Beispiel einer solchen Fläche weiter unten kennen lernen.

Tangentialebene einer Fläche.

81. Ist auf einer Fläche ein Punkt P gegeben, so können wir durch P auf der Fläche unendlich viele Kurven zeichnen, etwa die Schnittkurven mit den Ebenen

eines Büschels, dessen Achse durch P geht. Jede dieser Kurven besitzt in P eine Tangente und diese Tangente hat mit der betreffenden Kurve, also auch mit der Fläche, zwei Nachbarpunkte in P gemein, ist also auch eine Tangente der Fläche. Nun zeigt die Analysis, dass alle diese Tangenten in einem Punkte P an eine Fläche in einer Ebene liegen, der Tangential-Ebene in P an die Fläche. P heisst der Berührungspunkt der Tangentialebene. Jede durch P in dieser Ebene gezogene Gerade hat in P zwei benachbarte Punkte mit der Fläche gemein.

Liegt eine Gerade h ganz auf einer Fläche, so geht also die Tangentialebene in jedem Punkte von h jedenfalls durch diese Gerade hindurch.

Liegen auf einer Fläche zwei gerade Linien, die sich schneiden, so ist die Tangentialebene in ihrem Schnittpunkt bestimmt als die Ebene dieser beiden Geraden, gleichgiltig ob die beiden Geraden unendlich benachbart sind oder ob sie einen endlichen Winkel einschliessen.

Ist P ein Punkt einer Kegelfläche, so geht die Tangentialebene in P jedenfalls durch die Erzeugende hindurch, welche durch P läuft. Dies ist die Verbindungslinie von P mit der Spitze S des Kegels. Durch S gibt es eine zu dieser Erzeugenden benachbarte Erzeugende und die durch beide bestimmte Ebene muss die Tangentialebene in P sein. Es ist also für alle Punkte einer Erzeugenden einer Kegelfläche (und allgemeiner einer abwickelbaren Fläche) die Tangentialebene die gleiche. Es berührt folglich die Tangential-

ebene einer Kegelfläche oder abwickelbaren Fläche längs einer Erzeugenden die Fläche (Beispiel: der Kreiskegel.)

Ordnung und Klasse einer Fläche.

82. Unter der Ordnung einer Fläche versteht man die Anzahl der Schnittpunkte, welche eine beliebige Gerade mit der Fläche liefert und zwar im algebraischen Sinne, also ohne Rücksicht auf Realität. (vergl. 51) Diese Ordnung gibt dann auch die Maximalzahl der reellen Schnittpunkte, welche eine Gerade mit der Fläche gemein haben kann.

Hat man eine Kegelfläche, z. B. eine von der 2. Ordnung, so wird sie von irgend einer Geraden in zwei Punkten geschnitten. Nach diesen zwei Punkten laufen nun zwei Erzeugende der Kegelfläche, nämlich die Verbindungslinien derselben mit der Spitze. Die durch die Gerade und die Spitze gehende Ebene hat mit der Kegelfläche dann gerade die genannten beiden Erzeugenden gemein. Bei einer Kegelfläche gibt also die Ordnung auch die Zahl der Erzeugenden, welche eine beliebige, durch die Spitze gehende, Ebene aus dem Kegel ausschneidet.

Der Schnitt irgend einer Ebene mit einer Fläche n. Ordnung ist eine Kurve n. Ordnung, da jede Gerade in dieser Ebene n Punkte mit der Fläche, folglich eben soviele mit der Schnittkurve gemein hat.

Unter der Klasse einer Fläche verstehen wir die Anzahl der Tangentialebenen, die durch eine beliebige Gerade an die Fläche gelegt werden können, auch wieder im Sinne der Analysis.

Eine Kegelfläche, überhaupt jede abwickelbare Fläche besitzt nur einfach unendlich viele (∞^1) Tangentialebenen. Bei diesen Flächen definiert man die Klasse als die Zahl ihrer Tangentialebenen, die durch einen beliebigen Punkt hindurchgehen.

Beispiel einer windschiefen Regelfläche.

83. Gegeben sind drei Gerade h, h_1, h_2, von denen keine zwei in einer Ebene liegen. Eine Gerade bewegt sich so, dass sie beständig jede dieser drei Geraden schneidet. Man beweise

1) Die bewegte Gerade schneidet auf den drei festen Geraden projektive Punktreihen aus;
2) Schneidet irgend eine Gerade die bewegte Gerade in drei ihrer Lagen, so schneidet sie dieselbe in jeder Lage.

Zunächst ist zu zeigen, wie man sich Gerade verschaffen kann, welche h, h_1 und h_2 begegnen. Wählen wir auf h einen Punkt A willkürlich (Fig. 53), so können wir durch A und h_1 eine Ebene (Ah_1), sowie durch A und h_2 eine Ebene (Ah_2) legen. Diese beiden Ebenen schneiden sich dann in einer Geraden a, welche h_1 in A_1, sowie h_2 in A_2 trifft, also die verlangte Eigenschaft hat. Auf diese Weise können wir unendlich viele solche Gerade b, c, d u. s. f. finden, indem wir auf h Punkte B, C, D ... wählen. Es ist klar, dass irgend zwei solche Gerade z. B. a und b sich nicht schneiden. Denn wenn sie sich schneiden würden, lägen sie in einer Ebene und in der gleichen Ebene müssten auch h, h_1, h_2 liegen, was gegen unsere Voraussetzung ist. Also beschreibt die Gerade eine

windschiefe Regelfläche. Es ist aber dann nach 22) Satz 4

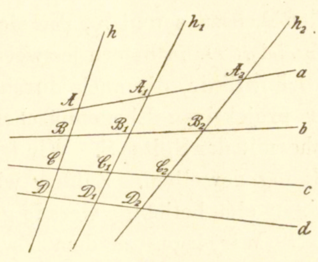


Fig. 53.

$$(ABCD) = [(Ah_1)(Bh_1)(Ch_1)(Dh_1)] = (A_2 B_2 C_2 D_2)$$

und $(ABCD) = [(Ah_2)(Bh_2)(Ch_2)(Dh_2)] = (A_1 B_1 C_1 D_1)$ folglich

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$$

Damit ist der erste Teil unserer Behauptung bewiesen.

Es sei ferner eine Gerade h_x gefunden, welche a, b und c schneidet. Projizieren wir nun die projektiven Punktreihen $A, B, C \ldots$ auf h und $A_1, B_1, C_1 \ldots$ auf h_1 je aus h_x durch einen Ebenenbüschel, so sind diese Ebenenbüschel projektiv. Dann sind aber folgende Ebenen identisch:

$$(Ah_x) \equiv (A_1 h_x) \equiv (h_x a)$$
$$(Bh_x) \equiv (B_1 h_x) \equiv (h_x b)$$
$$(Ch_x) \equiv (C_1 h_x) \equiv (h_x c)$$

Es fallen also in den projektiven Büscheln drei Ebenen mit ihren entsprechenden zusammen, folglich muss überhaupt jede Ebene mit ihrer entsprechenden identisch sein. Es ist demnach auch $(Dh_x) \equiv (D_1 h_x)$ d. h. die Gerade d und überhaupt jede solche Gerade schneidet h_x.

§ 29. Die Kegelfläche 2. Ordnung.

84. Betrachten wir jetzt zwei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen s und s_1, die sich in S schneiden mögen (Fig. 54). Dann liefern je zwei entsprechende Ebenen eine Schnittlinie, die auch durch S geht. Das Erzeugnis der projektiven Ebenenbüschel ist demnach eine Kegelfläche mit der Spitze S. Wir fragen zunächst nach der Ordnung derselben. Zählen wir also ab, in wie viel Punkten eine beliebige Gerade g dieser Kegelfläche begegnet. Wir legen zu dem Zwecke durch g irgend eine Ebene. Dann werden die projektiven

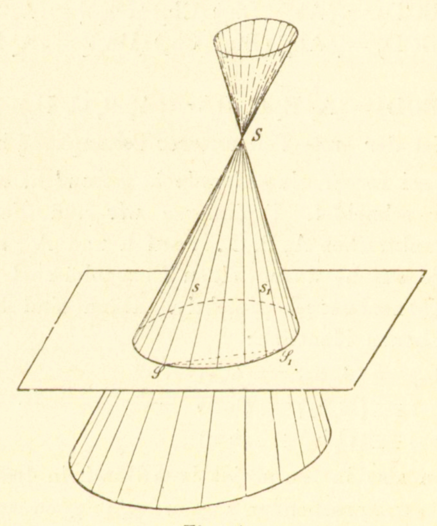


Fig. 54.

Ebenenbüschel s und s_1 in zwei projektiven Strahlenbüschel S und S_1 geschnitten und die Schnittkurve der

Ebene mit der Kegelfläche stellt sich dar als das Erzeugnis dieser projektiven Strahlenbüschel. Also ist diese Schnittkurve der Ebene mit dem Kegel ganz allgemein ein Kegelschnitt. Die Gerade g aber trifft diesen in zwei Punkten und das sind zugleich ihre Schnittpunkte mit der Kegelfläche. Es ist mithin die Kegelfläche von der 2. Ordnung. Die analytische Geometrie zeigt überdies, dass sich jede Kegelfläche 2. Ordnung in dieser Weise durch projektive Ebenenbüschel erzeugen lässt. Es ist also die hier betrachtete Kegelfläche die allgemeine 2. Ordnung. Fügen wir noch die Bemerkung hinzu, dass eine Tangentialebene des Kegels die gewählte Ebene in einer Linie schneidet, welche Tangente des Schnittkegelschnittes in dieser Ebene sein muss, so ergibt sich ganz ebenso wie in 52).

Satz 41: „Zwei projektive Ebenenbüschel mit sich schneidenden Achsen s und s_1 erzeugen durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen einen allgemeinen Kegel 2. Ordnung, der auch die Achsen s und s_1 als Erzeugende enthält. Die Tangentialebenen längs dieser beiden Erzeugenden sind die Ebenen, welche der Verbindungsebene $(s\, s_1)$ bezüglich entsprechen. Der Schnitt des Kegels mit einer beliebigen Ebene ist ein Kegelschnitt. Der Kegel ist auch von der 2. Klasse."

Da jede Erzeugende des Kegels in ihrer ganzen Ausdehnung zu beiden Seiten der Spitze zu nehmen ist, so besteht der Kegel aus zwei in der Spitze zusammenhängenden Mänteln. Was den Schnitt des Kegels mit einer Ebene ε betrifft, so ergeben sich die drei möglichen Fälle folgendermassen: Legen wir durch die

Spitze S des Kegels eine Ebene $\varepsilon_0 \parallel \varepsilon$, so kann ε_0 zwei reelle Erzeugende mit dem Kegel gemeinsam haben. Dann ist der Schnitt von ε mit dem Kegel eine Hyperbel, deren Asymptotenrichtungen durch diese beiden Erzeugenden gegeben sind. Oder ε_0 hat keine reelle Erzeugende mit dem Kegel gemein, in diesem Falle ist der Schnitt von ε mit dem Kegel eine Ellipse. Wenn endlich ε_0 den Kegel berührt, so wird man in ε als Schnitt eine Parabel erhalten. Damit ist die Bezeichnung dieser Kurven als „Kegelschnitte" gerechtfertigt. Sie stammt schon von den Griechen her.*)

85. Legt man von einem Punkte S im Raume die projizierenden Strahlen nach den Punkten eines Kreises, so erhält man eine Kegelfläche. Wählt man zwei ihrer Erzeugenden aus, so kann man mit diesen als Achsen die Kegelfläche durch projektive Ebenenbüschel erzeugen, ausgehend von der Erzeugung des Kreises durch projektive Strahlenbüschel. Die Kegelfläche ist also von der 2. Ordnung — sie ist, wie man zeigen kann, identisch mit der allgemeinen Kegelfläche 2. Ordnung — und wird also von einer beliebigen Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten. Dies liefert den

Satz 42: „Projiziert man einen Kreis aus irgend einem Punkte auf eine Ebene, so ist die Projektion ein Kegelschnitt."

Wird der Punkt S speziell auf der Senkrechten angenommen, die man im Mittelpunkte M des Kreises auf der Ebene desselben errichten kann, so erhält man einen speziellen Kegel 2. Ordnung, der auch erzeugt

*) Apollonius von Pergae: „Conica" (250 v. Chr.)

werden kann durch Drehung eines rechtwinkligen Dreieckes um die Kathete SM. Dieser Kegel heisst „gerader Kreiskegel“, „Umdrehungskegel“, „Rotationskegel“. Der Schnitt desselben mit einer beliebigen Ebene ist aber auch wieder ein Kegelschnitt. Nimmt man die Achsen s und s_1 der projektiven Ebenenbüschel parallel an, so rückt der Punkt S ins Unendliche und man erhält als Erzeugnis den allgemeinen „Cylinder 2. Ordnung“. Dieser kann wieder speziell in den geraden „Kreis“ oder „Umdrehungs“-Cylinder (Rotations-Cylinder) übergehen.

§ 30. **Die geradlinige Fläche 2. Ordnung.**

86. Betrachten wir jetzt zwei projektive Ebenenbüschel in allgemeiner Lage, deren Achsen s und s_1 sich also nicht schneiden. Je zwei entsprechende Ebenen der Büschel wie etwa α und α_1, werden sich in einer Geraden h schneiden, die sowol s in P als s_1 in P_1 treffen muss (Fig. 55). Wir erhalten auf diese Weise unendlich viele Gerade h_1 h_1, h_2 etc., die offenbar eine windschiefe Regelfläche bilden (Beweis dafür wie in 83). Wir nennen das System dieser Geraden auch eine „Regelschaar“ und bezeichnen es kurz mit [h]. Die dadurch gegebene Regelfläche ist von der zweiten Ordnung. Denn schneiden wir sie mit irgend einer Ebene, so werden die projektiven Ebenenbüschel s und s_1 in projektiven Strahlenbüscheln S und S_1 getroffen, deren Erzeugnis den Schnitt mit der Ebene liefert. Es schneidet also die beliebige Ebene die Regelfläche nach einem Kegelschnitt, mithin ist die Fläche von der zweiten Ordnung. Die Rechnung zeigt wieder, dass die

allgemeine Fläche zweiter Ordnung, wie sie durch eine beliebige Gleichung zweiten Grades gegeben wird, in dieser Weise erzeugt werden kann. Diese geradlinige Fläche zweiter Ordnung heisst auch „einschaliges Hyperboloid".

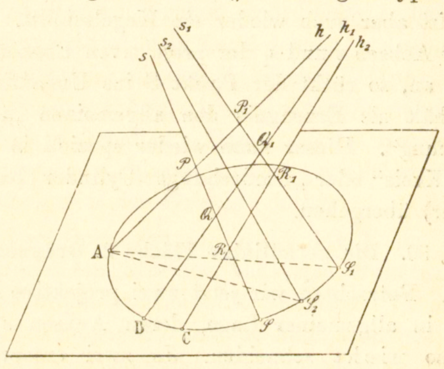


Fig. 55.

Es ergibt sich sofort auch eine zweite Erzeugung unserer Fläche. Trifft die Erzeugende h_1 in P und P_1, ferner h_2 in R und R_1 die Achsen s und s_1 u. s. f., so ist die Reihe der Punkte P_1, Q_1, R_1 . . . perspektiv zu den Ebenen α, β, γ des Büschels s, durch die sie ausgeschnitten wird. Ebenso ist die Punktreihe P, Q, R . . . auf s zum Ebenenbüschel α_1, β_1, γ_1 . . . perspektiv. Da aber die beiden Ebenenbüschel projektiv, so ist auch die Punktreihe P, Q, R . . . projektiv zur Punktreihe P_1, Q_1, R_1 . . . Die Regelschaar [h] kann also auch dadurch erhalten werden, dass man in zwei projektiven Punktreihen im Raume entsprechende Punkte durch Gerade verbindet.

Daraus folgt aber noch eine weitere merkwürdige Eigenschaft. Ist nämlich s_2 irgend eine Gerade,

welche die drei Geraden h, h_1, h_2 schneidet, so sind alle Voraussetzungen erfüllt, um den in $82,_2$ ausgesprochenen Satz anwenden zu können. Dennoch muss s_2 jede Gerade h der Regelschaar [h] schneiden und jede Gerade, welche h, h_1, h_2 trifft, hat diese Eigenschaft. Alle diese Geraden bilden aber wieder eine Regelschaar [s], die auch von der zweiten Ordnung und alle Erzeugende dieser zweiten Regelschaar müssen ebenfalls auf unserer Fläche zweiter Ordnung gelegen sein, da durch jeden Punkt einer Geraden von [s] ja eine Gerade von [h] geht. Die Achsen s und s_1 gehören auch zu dieser Regelschaar [s]. Wir haben demnach:

Satz 43: „Das Erzeugnis zweier projektiver Ebenenbüschel in allgemeiner Lage ist eine Regelschaar [h] oder eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung. Dieselbe Fläche kann auch dadurch erzeugt werden, dass man in zwei projektiven Punktreihen im Raume entsprechende Punkte durch Gerade verbindet. Auf der Fläche liegt noch eine zweite Regelschaar [s]. Alle Geraden h sind untereinander windschief, ebenso alle Geraden s, aber jede Gerade h schneidet jede Gerade s. Irgend zwei Gerade einer Regelschaar werden von den Geraden der andern Schaar in projektiven Punktreihen geschnitten“.

Die Fläche ist dieselbe, wie die in 83) erwähnte und sie lässt sich in doppelter Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugen. Denn greift man irgend drei Gerade der einen Regelschaar heraus und lässt eine Gerade sich so bewegen, dass sie stets diese drei Geraden schneidet, so beschreibt die bewegte Gerade die andere Regelschaar. Hat man überhaupt zwei Systeme

[h] und [s] von unendlich vielen Geraden derart, dass alle Geraden eines Systems untereinander windschief sind, während jede Gerade des einen Systems jede des andern schneidet, so bilden dieselben die beiden Regelschaaren einer solchen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung (Monge 1795).

87. Legt man durch eine Gerade h_x der Regelschaar [h] irgend eine Ebene, so muss diese noch eine Gerade aus der Fläche ausschneiden, da die Schnittkurve im ganzen von der zweiten Ordnung sein muss. Diese Gerade kann dann, da sie h_x schneidet, nur der Regelschaar [s] angehören und heisse s_x. Für den Schnittpunkt von h_x und s_x ist die Ebene also (81) die Tangentialebene. Es ist folglich jede Ebene, die durch eine Gerade der Fläche zweiter Ordnung hindurchgeht, eine Tangentialebene der Fläche. In jedem Punkte der Fläche ist die Tangentialebene bestimmt als die Ebene der beiden durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden.

Die verschiedenen Typen der geradlinigen Fläche zweiter Ordnung erhalten wir, wenn wir uns die Fläche durch projektive Punktreihen s und s_1 erzeugt denken. Es sind dann folgende zwei Fälle möglich:

a) Die unendlich fernen Punkte von s und s_1 entsprechen einander nicht in der projektiven Beziehung dieser beiden Punktreihen. Es entspricht also z. B. dem unendlich fernen Punkt von s ein bestimmter endlicher Punkt auf s_1. Die Parallele durch diesen Punkt zu s ist eine Erzeugende h_s, der Regelschaar [h]. In gleicher Weise gibt es zu jeder Erzeugenden eine parallele Erzeugende der andern Schaar. Die

dadurch erzeugte Fläche lag unsern bisherigen Betrachtungen zu Grunde und wir nannten sie bereits das einschalige Hyperboloid (Fig. 56). Die unendlich ferne Ebene schneidet die Fläche in einem Kegelschnitt.

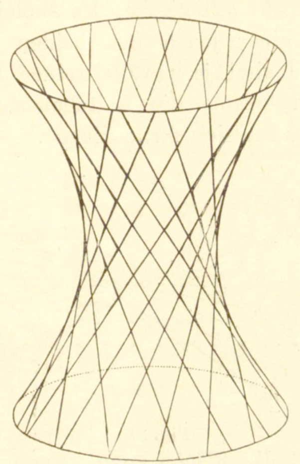


Fig. 56.

b) Tritt der speziellere Fall ein, dass die unendlich fernen Punkte von s und s_1 *einander entsprechen*, so sind diese Punktreihen also ähnlich. Die Verbindungslinie dieser beiden unendlich fernen Punkte ist eine ganz im Unendlichen gelegene Gerade h_∞, die bestimmt ist durch die Stellung der Ebene, welche parallel zu s und s_1 läuft. Alle Geraden der Regelschaar [s] müssen aber h_∞ schneiden, also sind sie alle parallel zu dieser Ebene.

Die unendlich ferne Ebene enthält nun von unserer Fläche die Gerade h_∞, sie muss mithin noch eine Ge-

rade s_∞ der *andern* Schaar enthalten. Alle Geraden h müssen s_∞ schneiden, also sind auch alle Geraden der Regelschaar [h] parallel einer bestimmten Ebene. Die dadurch entstehende Fläche heisst „windschiefes“ oder „hyperbolisches Paraboloid“ (Fig. 57). Die Geraden einer jeden der beiden Regelschaaren auf der Fläche sind je parallel einer Ebene. Diese beiden Ebenen heissen die Leitebenen. Die Fläche *berührt* die unendlich ferne Ebene.

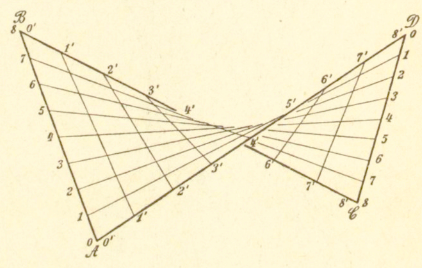


Fig. 57.

Man erhält die Fläche auch, wenn man eine Gerade sich so bewegen lässt, dass sie beständig zwei feste Gerade schneidet und dabei parallel bleibt zu einer gegebenen, festen Ebene.

Eine einfache Erzeugung dieser Fläche besteht darin, dass man (Fig. 57) in einem Tetraeder zwei Paare von Gegenkanten (AB und CD, BC und AD) in gleichviel Teile teilt und entsprechende Teilpunkte verbindet.

Register.

(Die beigesetzten Zahlen geben die Seite des Buches an.)

Humboldts, Alexander von, Briefe an seinen Jugendfreund W. G. Wegener. 8°. M. 2.50.

Jahresberichte f. neuere deutsche Litteraturgeschichte. Unter ständiger Mitwirkung erster Fachgelehrter und mit besonderer Unterstützung von **Erich Schmidt** herausgegeben von **Julius Elias** und **Max Osborn**. Lex. 8°. Alljährlich ein Band.

I. Bd. [Jahr 1890] M. 10.—, geb. M. 12.—.
II. Bd. [Jahr 1891] M. 12.—, geb. M. 14.—.
III. Bd. [Jahr 1892] M. 23.80, geb. M. 25.80.
IV. Bd. [Jahr 1893] M. 26.80, geb. M. 28.80.
V. Bd. [Jahr 1894] M. 31.—, geb. M. 33.-.
—— **Einbanddecken zu jedem Band M. 2.—.** ——

Iffland's theatralische Werke. Mit Biographie. 10 Bde. Taschenausg. Eleg. geb. M. 10—.

Kleinpaul, Rudolf, Die Lebendigen und die Toten. 8°. M. 6.—. Geb. M. 7 20.

Klopstocks Werke. Mit Biographie und erläuternden Anmerkungen. Herausgeg. v. A. L. Back, Kirchenrat. 6 Bde. Kl. 8°. M. 8.—. Eleg. geb. M. 11.—.

Klopstocks Oden. Kritisch-historische Ausgabe. Mit Unterstützung des Klopstock-Vereins und in Verbindung mit **Jaro Pawel** herausgegeben von **Franz Muncker.** Gr. 8°. M. 12.—. Geb. in Halblederbd. M. 14.—.

Klopstocks Oden (mit den geistlichen Liedern und Epigrammen). Mit erklärenden Anmerkungen von A. L. Back. 2 Teile in einem Band. M. 3.30.

Klopstocks Oden. Taschenausgabe. M. 1.40.

— **Messias.** Kl. 8°. 2 Teile in einem Bande. M. 2.60.

Klopstock. Geschichte seines Lebens und seiner Schriften von **Franz Muncker.** Mit Klopstocks Bildnis in Lichtdruck. Neue Ausgabe in 1 Band. 1893. Gr. 8°. M. 12.—. Geb. in Halblederbd. M. 14.—.

Koch, Max, Geschichte der deutschen Litteratur. Geschenkausgabe. 8°. Geb. in Leinw. M. 3.—.

Kürschner, Deutscher Litteraturkalender. Erscheint jedes Jahr. 8°. Geb. in Leinwd. M. 6.50.

Kurz, Isolde, Gedichte. 3. Aufl. 8°. Geb. M. 4.—.
— Florentiner Novellen. 8°. M. 4—. Geb. M. 5.50.
— Phantasieen und Märchen. 8°. Kart. M. 3.—.
— Italienische Erzählungen. 8°. M. 4—. Geb. M. 5.50.

Lessings Werke.

Göschen'sche Original-Ausgaben.

Lessings sämtliche Schriften. Historisch-kritische Ausgabe von **Lachmann-Muncker.** 3. Aufl. vollständig in 18 Bänden gr. 8° geh. je M. 4.50, einf. Halbleder M. 6.—, fein Halbleder M. 7.—.

Bibliothekausgabe gr. 8°. 12 Halblederbände M. 33.—.
—„— „ 6 Halblederbände M. 26.—.
—„— „ 12 bill. Liebhaberbände M. 24.-

Kabinettausgabe 8°. 6 Halblederbände M. 15.—.
—„— „ 6 Liebhaberbände M. 12.—.
—„— „ 6 feine Leinwandbände M. 10.—.

Lessings Werke.

Göschen'sche Original-Ausgaben.

Billige 8°-Ausgabe 6 Bände in feinem Halblederband M. 7.60.
—„— in eigenartig vornehmem Liebhaberband M. 6 60.
Lessings ausgewählte Werke 2 Bände in 1 Prachtband M. 2.80.
Lessings Meisterdramen, vornehmer Einband. M. 3.—.
Lessings Hamburg. Dramaturgie. 8°. M. 1.20.
Lessings Emilia Galotti. 8°. M. —.60.
Lessings Erziehung des Menschengeschlechts. 8°. M. —.40.
Lessings Fabeln. 8°. M. —.80.
Lessings Laokoon. 8°. M. 1.—.
Lessings Minna von Barnhelm. 8°. M. —.60.
Lessings Nathan der Weise. 8°. M. —.90
Lessings Nathan der Weise. Historisch-kritische Ausgabe. 8°. M. 1.—.
Lessing, Wie die Alten den Tod gebildet. 8°. M. —.25.

Lie, Dyre Rein. Eine Erzählung aus Urgroßvaters Hause. 8°. M. 3.—. Geb. M. 4.—.
— **Lindelin.** Märchendrama in 4 Akten. 8°. M. 2.40. Gebd. M. 3.20.
Liederdichter, Deutsche, des 12.—14. Jahrhunderts. Eine Auswahl v. K. Bartsch. 3. Aufl., besorgt v. W. Golther. Gr. 8°. M. 5.—. In altdeutschem Bibliotheksband M 6.—.
Linden, Ada, Aus der Stille. Gedichte. Geb. M. 2.—.

Deutsche Litteraturdenkmale

des 18. u. 19. Jahrhunderts, herausg. v. August Sauer.

— Ausführliche Prospekte gratis und franco von der Verlagshandlung oder durch jede Buchhandlnng. —

Marbach, Oswald, Goethes Faust. 8°. M. 8.—. Geb. M. 11.—.
Meringer, Rud., u. Karl Mayer, Versprechen und Verlesen. Eine psychologisch-linguistische Studie. Gr. 8°. M. 4.50.
Mörike, Ges. Schriften. 4 elegante Leinwandbände. Bd. I. **Gedichte.** 11. Aufl. Idylle vom Bodensee. Bd. II. **Erzählungen** 4. Aufl. Hutzelmännlein, Mozart auf der Reise nach Prag u. s. w. III/IV. **Maler Nolten.** Roman. 4. Auflage. Jeder Band eleg. geb. M. 5.—.
— **Mozart auf der Reise nach Prag.** Novelle. 5. Auflage. Vornehmer Leinwandband mit Rotschnitt M. 2 50.
— **Historie von der schönen Lau.** Mit 7 Umrißzeichnungen von Mor. v. Schwind. 4°. Prachtband M. 5.—.
Mörike-Storm-Briefwechsel. Herausgeg. v. Jakob Bächtold. Gr. 8°. M. 1.80. Geb. M. 2.80
Muncker, Franz, Klopstock. S. Klopstock.

Ossians Gedichte aus dem Gälischen im Silbenmaße des Originals von Ch. W. Ahlwardt. 4. Aufl. 1861. 3 Bde. 16°. M. 3.—.

Platen, Aug. v., Gedichte. In neuer volkstümlicher Auswahl. 1887. Oktav. Geb. M. 1.20.

Reichel, Eugen, Gedichte. Oktav. Geb. M. 3.—.

Rückert, Friedrich, Gedichte in Auswahl. Oktav. Eleg. geb. M. 4.—.

Schönaich-Carolath, Prinz Emil von, Dichtungen. 4. Aufl. Oktav. M. 3.—. Geb. M. 4.—.

— **Geschichten aus Moll.** Oktav. M. 3.40. Geb. M. 4.—.

— **Thauwasser.** Oktav. M. 3.20. Geb. M. 4.—.

— **Der Freiherr.** — **Regulus.** — **Der Heiland der Tiere.** Drei Novellen. Oktav. M. 3.— Geb. M. 4.—.

Spies, Hermine. Ein Gedenkbuch von ihrer Schwester. Oktav. M. 5.—. Geb. M. 6.—.

Stauffer-Bern. Sein Leben, seine Briefe, seine Gedichte. Dargestellt von Otto Brahm. Oktav. M. 4.50. Geb. M. 6.—.

Vischer-Erinnerungen. Aeußerungen und Worte von Ilse Frapan. Ein Beitrag zur Biographie Fr. Th. Vischers. 2. Aufl. 1889. Mit Vischers Porträt in Lichtdruck. Oktav. M. 3.—. Geb. M. 4.—.

Ziegler, Professor Dr. Theob., Die Fragen der Schulreform. Zwölf Vorlesungen. 1891. Oktav. M. 2.50.

— **Die soziale Frage eine sittliche Frage.** 5. Aufl. 1895. Oktav. M. 2.50. Geb. M. 3.—.

— **Das Gefühl.** Eine psychol. Untersuchung. 2. Aufl. 1893. Gr. Oktav. M. 4.20. Geb. M. 5.20.

— **Notwendigkeit und Berechtigung des Realgymnasiums.** Vortrag, gehalten in der Delegiertenversammlung d. allgem. dtsch. Realschulmännervereins zu Berlin am 28. März 1894. Gr. Oktav. M. —.[illegible].

— **Friedrich Theodor Vischer.** Vortrag, gehalten im Verein f. Kunst u. Wissenschaft zu Hamburg. 1893. Gr. Oktav. M. 1.20.

— **Der deutsche Student am Ende des 19. Jahrhunderts.** Vorlesungen, gehalten im Wintersemester 1894/95 an der Kaiser-Wilhelms-Universität zu Straßburg. 6. Aufl. 1897. Oktav. Kart. M. 3.50.

Lehrer-Zeitung: Wenn eine kurzgedrängte **physikalische Geographie** aus der Feder eines so tüchtigen Fachmannes, wie es Prof. Günther in München ist, erscheint, so ist von vornherein zu erwarten, daß das nur etwas Gutes sein kann. Jeder, der das Buch liest, wird sehen, daß er sich in dieser Erwartung nicht getäuscht hat.

Ausland: **Kaum je ist mir ein Buch zu Gesicht gekommen,** das wie **Rebmann's** „**der menschliche Körper** und **Gesundheitslehre**" auf so kleinem Raum ein so klares Bild von dem Bau und den Thätigkeiten des menschlichen Körpers geboten hätte. Ich stehe nicht an, das Werkchen als ein **für den Unterricht höchst brauchbares** zu bezeichnen.

Littbl. d. dtsch. Lehrerztg.: Die beiden Bändchen „**Hartmann von Aue** rc." und „**Walther von der Vogelweide**" geben eine Auswahl des **Besten aus dem Besten** unserer **altklassischen deutschen Litteratur** im ursprünglichen Text.

Allg. Zeitung (München): Ellinger bietet in „**Kirchenlied und Volkslied,** geistliche und weltliche Lyrik des 17. und 18. Jahrhunderts bis auf Klopstock" den Schülern ein Handbuch, das den Verständigeren für den deutschen Unterricht gewiß **hochwillkommen** ist.

Berl. philolog. Wochenschrift: **Steuding, griechische und römische Mythologie.** Die überaus schwierige Aufgabe, den wesentlichsten Inhalt auf nur 140 Kleinoktavseiten übersichtlich und gemeinverständlich darzustellen, ist von dem Verfasser des vorstehenden, in der bekannten Art der „Sammlung Göschen" ausgestatteten Büchleins **in höchst anerkennenswerter Weise gelöst worden.**

Zeitschr. f. dtsch. Unterricht: Die „**Althochdeutsche Litteratur**" Schaufflers ist eine **hocherfreuliche Gabe**; sie beruht überall auf den neuesten Forschungen und giebt das Wichtigste in knappster Form.

Natur: Es ist geradezu erstaunlich, wie es der rühmlichst bekannte Verlag ermöglicht, **für so enorm billige Preise** so **vorzüglich ausgestattete Werkchen** zu liefern. Das vorliegende Bändchen bringt in knapper und verständlicher Form das Wissenswerteste der **Mineralogie** zum Ausdruck. Saubere Abbildungen erleichtern das Verständnis.

Globus: Es ist **erstaunlich, wie viel diese kleine Kartenkunde bringt,** ohne an Klarheit zu verlieren, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß **viele Abbildungen** den Raum stark beengen. **Vortrefflich** wird die **Kartenprojektionslehre** und die **Topographie geschildert.**

Nationalzeitg.: Es ist **bis jetzt in der deutschen Litteratur wohl noch nicht dagewesen,** daß ein Leinwandband von fast 300 Seiten in vorzüglicher Druck- und Papierausstattung zu einem Preis zu haben war, wie ihn die „Sammlung Göschen" in ihrem neuesten Bande, **Max Koch's Geschichte der deutschen Litteratur** für den Betrag von **sage achtzig Pfennige** der deutschen Leserwelt bietet.

Leipziger Zeitung: Wer sich rasch einen guten Ueberblick über das Gebiet der deutschen Heldensage verschaffen will, ohne eigene intensivere Studien machen zu können, der greife getrost zu dem Büchlein von Jiriczek.

Prakt. Schulmann: Ein **Meisterstück kurzen** und **bündigen,** und doch **klaren** und **vielsagenden Ausdrucks** wie die „Deutsche

Litteraturgeschichte" von Prof. M. Koch ist auch die vorliegende „Deutsch Geschichte im Mittelalter".

Natur: In der **Chemie** von Dr. Klein empfängt der Schüler fas mehr, wie er als Anfänger bedarf, mindestens aber so viel, daß er da Wissenswürdigste als unentbehrliche Grundlage zum Verständnisse de Chemie empfängt. . .

Kunst f. Alle (München): **K. Kimmich** behandelt in seinen Bändchen, „Zeichenschule" benannt, in **knapper, kerniger, sachlich zielbewußter Form** das weite Gebiet des bildmäßigen Zeichnens und Malens. . . . Gleich nutzbringend und in reichstem Maße bildend für Lehrer, Schüler und Liebhaberkünstler, möchte ich das **wirklich vorzügliche Werk** mit warmen anerkennenden Worten der Einführung in Schule, Haus und Werkstatt zugänglich machen. Die Ausstattung ist dabei eine so vornehme, daß mir der Preis von 80 Pfennigen für das gebundene Werk von 138 Seiten kl. 8° wirklich **lächerlich billig** erscheint. Nicht weniger als 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck sowie 135 Voll- und Textbilder illustrieren den **äußerst gesunden Lehrgang** dieser Zeichenschule in **feinfühlender Weise.**

Schwäb. Merkur: **Prof. G. Mahler** in Ulm legt uns ein Darstellung der **ebenen Geometrie** vor, die bis zur Ausmessung des Kreises einschließlich geht. Besondere Sorgfalt ist der Auswahl und Anordnung der Figuren zu teil geworden, deren saubere Ausführung in 2 Farben angenehm berührt.

Globus: **Hoernes, Urgeschichte.** Der bewährte Forscher auf **vorgeschichtlichem Gebiete** giebt hier in knappster Form die lehrreiche Zusammenstellung des Wissenswertesten der Urgeschichte. **Vortrefflich geeignet zur Einführung und zum Ueberblick.**

Jahresberichte der Geschichtswissenschaft: Hommel, auf dem Gebiet der altorientalischen Geschichte eine anerkannte Autorität, behandelt in diesem Bändchen die morgenländische Geschichte mit großer Genauigkeit und wissenschaftlicher Gründlichkeit in knappster Form. Das kleine Büchlein muß warm empfohlen werden.

Lpzgr. Ztg. (Wissensch. Beil.): „Die **Pflanze" von Dr. E. Denner** können wir bestens empfehlen. In kürzester, knappester, **sehr klarer und verständlicher Form** weiß sein Verfasser alles Wissenswerteste über den inneren und äußeren Bau und über die Lebensverrichtungen der Pflanze zur Anschauung zu bringen, wozu seine **ganz vortrefflichen, selbstgezeichneten Textabbildungen** außerordentlich viel beitragen helfen.

Schwäb. Merkur: Die **Römische Altertumskunde** von **Dr. Leo Bloch** behandelt kurz und klar die Verfassungsgeschichte, die Staatsgewalten, Heerwesen, Rechtspflege, Finanzwesen, Kultus, das Haus, die Kleidung, die Bestattung und andere öffentliche und häusliche Einrichtungen der Römer . . . .

Weimarsche Zeitg.: **Waltharilied.** Mit dieser Uebersetzung wird uns eine hochwillkommene und von Litteraturfreunden längst ersehnte Gabe geboten. . . . Von einer guten Uebersetzung ist zu verlangen, daß sie, **sinn-** und zugleich möglichst **wortgetreu**, ohne dem Urtext, wie der deutschen Sprache Gewalt anzuthun, den Geist des Original